

# **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**

Helena Fonseca, Lina Brunheira, João Pedro da Ponte  
Departamento de Educação, F.C.U.L.

## **1. Introdução**

Nesta conferência pretendemos dar a conhecer o trabalho realizado pelo Projecto Matemática para Todos — Investigações na Sala de Aula, que se desenvolveu no Centro de Investigação em Educação da FCUL durante cinco anos (de 1995 a 1999) e envolveu cerca de duas dezenas de docentes dos ensinos básico, secundário e superior.

O objectivo principal do projecto era o de estudar a realização de investigações matemáticas por parte dos alunos de diversos níveis de ensino, em termos da dinâmica da aula, das competências dos professores, das implicações curriculares e do desenvolvimento dos respectivos materiais de suporte. Não vamos, no entanto, fazer uma lista pormenorizada de actividades, resultados e conclusões, matéria que cabe melhor num relatório do que numa apresentação deste tipo<sup>1</sup>. Vamos, isso sim, procurar evidenciar alguns aspectos que nos parecem particularmente importantes para os professores interessados na realização de investigações matemáticas com os seus alunos.

Para isso, começaremos por discutir o papel do trabalho de investigação em Matemática, recorrendo, em especial, aos testemunhos de grandes matemáticos. Procuraremos abordar questões como: O que é, realmente investigar em Matemática? Qual o papel da investigação na construção do conhecimento matemático? A realização de trabalho investigativo está ao alcance dos alunos? Quais as razões da sua importância em termos educativos?

Em segundo lugar abordaremos a dinâmica da aula onde os alunos realizam trabalho investigativo. O que há de específico numa aula dedicada a este tipo de trabalho? Quais as principais fases em que se desenrola? Quais os aspectos a que o professor deve dar especial atenção?

Alargando o âmbito da nossa discussão, abordamos, em terceiro lugar, o que é necessário fazer em termos de preparação deste tipo de aula, por parte do professor. Que decisões é preciso tomar? Como escolher as tarefas a propor aos alunos? Como organizar o seu trabalho, de modo a garantir as melhores condições de sucesso?

Para preparar da melhor maneira as aulas de investigação que procura levar a cabo, o professor deve igualmente reflectir sobre as experiências que vai realizando neste domínio, o

que constitui o quarto tópico da nossa apresentação. Que aspectos deve o professor ter em conta na reflexão que faz sobre as suas experiências?

Finalmente, no último ponto discutimos algumas condições de natureza geral, que dizem respeito não só ao professor individual, mas a grupos de pesquisa e equipas de projecto, cuja constituição será certamente essencial para que este tipo de trabalho se possa generalizar nas nossas escolas. Procuraremos analisar, então, o que podem ser projectos educativos neste domínio e de que modo podem contribuir para uma efectiva renovação das práticas pedagógicas nas escolas.

Deste modo, num primeiro momento procuramos responder à questão: PORQUÊ? Num segundo momento, abordamos a questão: COMO? Tratamos esta questão a diversos níveis, começando pela prática lectiva, passando ao trabalho de preparação e reflexão sobre as aulas e considerando, por fim, o contexto institucional de trabalho do professor.

## **2. Investigações matemáticas, porquê?**

### *2.1 A Matemática e a actividade matemática*

A Matemática é frequentemente encarada como uma ciência exacta, pura, constituindo um corpo de conhecimentos construído dedutiva e cumulativamente, com rigor absoluto. Porém, diversos educadores matemáticos têm vindo a defender que é necessário ter em conta a prática dos matemáticos e olhar para a Matemática principalmente como uma actividade humana. Ou seja, para compreender a verdadeira natureza da Matemática é importante analisá-la numa perspectiva dinâmica, procurando compreender a forma como ela é construída e como evolui. Como afirmou Pólya “a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva” (1957, p. vii).

Mais ainda, o processo de construção da Matemática desvenda-nos o seu carácter falível, o qual Lakatos se atreveu a sublinhar. Para este filósofo, com formação de base em Matemática e Física,

A Matemática, tal como as ciências naturais, é falível e não indubitável; também ela se desenvolve pela crítica e correcção de teorias, que nunca estão livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro ou engano. Partindo de um problema ou de uma conjectura, existe uma pesquisa simultânea de demonstrações e contra-exemplos. Novas demonstrações explicam contra-exemplos antigos e novos contra-exemplos ameaçam demonstrações antigas (Davis & Hersh, 1985, p. 324).

Nesta reflexão de Lakatos, encontramos também reconhecida a importância que os problemas desempenham na evolução da Matemática e que é também corroborada por matemáticos e educadores. Como afirma o matemático Ian Stewart “os problemas são a força motriz da Matemática [...] um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos...” (1995, p. 17). Andrew Wiles, o famoso matemático que descobriu a demonstração do Teorema de Fermat, vai ainda mais longe. Segundo ele “é bom trabalhar em qualquer problema contanto que ele gere Matemática interessante durante o caminho mesmo se não o resolvermos no final” (Singh, 1998, p. 184).

Este matemático, que protagonizou uma das histórias mais fascinantes da Matemática contemporânea, conta como o seu contacto com as investigações, ainda em criança, foi decisivo:

Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para começar, parti da hipótese de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera. (Singh, 1998, p. 93)

Naturalmente que Wiles é um caso extremo: provou um teorema que tinha desafiado os matemáticos durante 350 anos. Mas este testemunho encerra dois aspectos significativos. Por um lado, existiu alguém que teve um certo papel na sua história: o seu professor de Matemática. Este concedeu atenção ao interesse do aluno por este tema, às investigações que o fascinavam, e acalentou-o. Por outro lado, mostra, mais uma vez, a influência motivadora que os bons problemas podem ter.

Mas se é indiscutível o interesse dos problemas para os matemáticos, é necessário compreender também qual o seu alcance educativo. Ou seja, será possível estabelecer um paralelo entre a actividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática? Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno. No entanto, a actividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza. Hadamard (1945) refere, por exemplo, que a análise do trabalho de um aluno que resolve um problema pode revelar apenas a existência de “uma diferença de grau, uma diferença de nível” (p. 104) em relação ao trabalho de invenção do matemático. Esta proximidade é também defendida por Ernest (1991), para quem a actividade de resolução e formulação de problemas pelo aluno tem um paralelo na actividade do matemático profissional desde que seja produtiva: “qualitativamente não diferem” (p. 283). Por “produtiva” este autor entende aquela Matemática que é criativa, por oposição à Matemática não-produtiva. A temática da resolução de problemas é, pois,

determinante para compreender até que ponto é possível aproximar o trabalho do aluno na disciplina de Matemática da actividade matemática.

## *2.2. Resolução de problemas e investigações, de que falamos afinal?*

O tema da resolução de problemas tem tido, desde o início da década de 80, uma atenção particular na Educação Matemática. Para isso contribuíram, especialmente, as ideias de Pólya. Segundo ele, o desenvolvimento pelos alunos da capacidade de resolução de problemas matemáticos deveria ser um dos objectivos principais do ensino da Matemática (no ensino secundário). O pensamento matemático que os alunos devem desenvolver na escola é constituído não só por raciocínio rigoroso ou formal mas também por processos informais, entre outros: “generalizar a partir da observação de casos, argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta” (1962/81, II, p. 101).

Pólya (1962/81) procurou também descortinar o significado de problema, num sentido amplo, fazendo distinção entre o problema em si e o processo de resolução. Uma pessoa tem um problema quando procura “conscientemente uma certa acção apropriada para obter um objectivo claramente concebido mas não atingível de maneira imediata.” (vol. I, p. 117). Ao realizar essa acção deu-se a resolução do problema. Inerente ao conceito de problema é a noção de dificuldade — sem esta não existe problema.

Esta noção de problema foi sendo progressivamente enriquecida por se considerar importante apresentar aos alunos não apenas problemas já perfeitamente formulados em contextos muito precisos. Muitas vezes, o processo de resolução pode implicar a exploração do contexto para além do que surge no enunciado, a formulação de questões alternativas. Uma perspectiva ainda mais ampla é dada por autores como John Mason (1996) e Alan Schoenfeld (1996) que, partindo da resolução de problemas, valorizam todo um conjunto de processos característicos da actividade matemática como formular, testar e provar conjecturas e argumentar.

Chegamos assim às actividades de exploração e de investigação matemática. Uma investigação é uma viagem até ao desconhecido. A ideia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Susan Pirie: “o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino” (1987, p. 2). Assim, na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objectivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

### 3. Investigações matemáticas, como?

#### 3.1 A aula de investigação

De um modo geral, a estrutura de uma aula com investigações envolve as seguintes fases: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão (Christiansen e Walther, 1986). Em muitas aulas de tipo investigativo a que temos assistido, estas são de facto as fases que temos encontrado. Assim, vamos então recordar alguns momentos de uma aula com investigações de modo a ilustrar um pouco a análise de cada uma dessas fases. Trata-se de uma aula de duas horas, com uma turma do 5º ano, em que foi proposta aos alunos uma tarefa de investigação intitulada “Potências e Regularidades” e onde os alunos trabalharam em grupo.

#### Potências e Regularidades<sup>2</sup>

1. O número 729 pode ser escrito como uma potência de base 3. Para o verificar basta escrever uma tabela com as sucessivas potências de 3:

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

a) Procura escrever como uma potência de base 2

$$64 =$$

$$128 =$$

$$200 =$$

$$256 =$$

$$1000 =$$

b) Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

2. Observa as seguintes potências de base 5:

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

a) O último algarismo de cada uma destas potências é sempre 5. Será que isso também se verifica para as potências de 5 seguintes?

b) Investiga o que se passa com as potências de 6.

c) Investiga também as potências de 9 e as de 7.

A fase de introdução da tarefa é bastante importante pois tem uma dinâmica própria que poderá influenciar decisivamente o sucesso do trabalho, principalmente se os alunos não estiverem familiarizados com este tipo de actividade. Nesta fase de arranque é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma. Pode optar-se pela distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral que pretenderá, por um lado, clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações e, por outro, criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Pode ser feita uma leitura em grande grupo, pensando principalmente em alunos mais novos, acompanhada por alguns comentários que o professor considere mais pertinentes, ou por algumas questões cujas respostas revelem se os alunos estão, ou não, a entender o que lhes é proposto. Pode-se, simplesmente, apresentar a tarefa por escrito, sem que se faça uma discussão inicial do enunciado. Isto poderá implicar um maior apoio do professor junto dos grupos no sentido de os ajudar a entender o que se pretende. No entanto, se a apresentação escrita da tarefa estiver o mais clara possível este apoio poderá ser minimizado e os alunos poderão iniciar a exploração mais autonomamente. O aumento da experiência neste tipo de trabalho leva a que os alunos criem progressivamente uma maior independência em relação ao professor e percebam mais facilmente o que lhes é pedido. Em alguns casos, a tarefa pode ser proposta apenas oralmente, sem nenhum suporte escrito, podendo o professor, eventualmente, ir registando no quadro algumas informações essenciais. Finalmente, podemos pensar ainda no caso da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa, espontaneamente, na aula a partir da actividade dos alunos.

Na aula a que nos referimos anteriormente, a professora optou por apresentar a tarefa oralmente e por escrito. Como se tratavam de alunos sem experiência de trabalho de cunho investigativo, começou por ler as questões propostas na ficha, explicou o significado de algumas palavras (por exemplo, a palavra *conjectura*, mas que não ficou completamente percebida nesta altura) e formulou algumas questões tais como: *Qual o significado da palavra cubo?* tendo sempre em conta a preocupação de não dar informação a mais nem a menos.

Na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na actividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa. Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da actividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos e do tipo de apoio que presta no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo. Segundo o NCTM (1994), o professor deve colocar regularmente a pergunta “porquê” a seguir aos

comentários dos alunos, de modo a “provocar o raciocínio”, levando-os a analisar e reflectir sobre o seu trabalho e a procurar significado para as suas descobertas. Nesta linha, podemos identificar outras questões com que o professor também deve desafiar os alunos: *Como explicam isso? Qual a relação entre essas ideias? Porque é que dizes que não poderá ser...?*

Na altura do arranque do trabalho, os alunos podem mostrar dificuldades que os impedem de realizar as suas investigações. Geralmente, quando estão pouco habituados ao trabalho de natureza investigativa, chamam rapidamente o professor, dizendo que não sabem o que é para fazer, pois não vislumbram nenhuma resposta imediata. Isto acontece porque não compreendem a natureza da tarefa proposta, cabendo aqui ao professor explicar-lhes um pouco do que é o trabalho investigativo e concretizar isso através de um ou outro exemplo.

O processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, compreende diversas etapas fundamentais. Primeiramente, tentam compreender a situação proposta, organizam os dados e formulam questões. Depois, fazem conjecturas, procuram testá-las e, em alguns casos, demonstrá-las.

No caso dos alunos mostrarem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, e sendo isto determinante para o prosseguimento da investigação, o professor deverá apoiá-los. Para levá-los a descobrir o que têm a fazer deve colocar-lhes questões mais ou menos indirectas consoante o seu grau de familiaridade com este tipo de tarefas. Poderá, por exemplo, colocar questões relativas àquilo que eles já fizeram, dizer que analisem atentamente um conjunto de dados já obtidos, sugerir que organizem esses mesmos dados de outra maneira... Na tarefa “Potências e Regularidades”, depois de desafiar os alunos a escreverem alguns números previamente dados como uma potência de base 2, era pedido que fizessem conjecturas acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2 e como potências de base 3. Os alunos começaram por não perceber bem o que era pedido e deram algumas respostas sem sentido, ou tentaram responder com base em tarefas semelhantes já realizadas anteriormente. A professora tentou então ajudá-los do seguinte modo: disse para lerem novamente a proposta de trabalho e perguntou-lhes directamente o que era pedido; tentou que percebessem que eles é que tinham de fazer descobertas observando com atenção os resultados que tinham obtido; explicou indirectamente o termo “conjectura” através de questões como *O que te parece que vai acontecer? Será que é mesmo assim?* Passado algum tempo, começaram a perceber o que se pretendia, a entusiasmar-se com a actividade e a formular conjecturas pertinentes sobre as propriedades dos últimos algarismos das potências de diversas bases.

Muitas vezes as solicitações feitas pelos alunos ao professor vão no sentido de validar os seus processos ou ideias. Como resposta o professor não deverá emitir opiniões muito concretas mas sim incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Outras vezes, sendo o

confronto de opiniões essencial neste tipo de actividade, o professor deve levar cada aluno a explicar e argumentar a favor do seu ponto de vista colocando questões como *O que te leva a pensar isso?* ou *Porque não concordas com a ideia do teu colega?* Este tipo de atitude fomenta a interacção entre os alunos, que vão aprendendo a discutir, a descobrir novas relações entre conceitos, a ter mais segurança nas suas ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio e a criatividade.

Durante o trabalho investigativo, os alunos poderão seguir por caminhos através dos quais não serão bem sucedidos. Nesta situação, o professor deverá evitar dizer-lhes imediatamente que seguem um caminho infrutífero e dar algum tempo para que seja a sua própria experiência a mostrar-lhes o erro. No entanto, tem de ter cuidado para que essa exploração mal conduzida não se prolongue demasiado e não acabe por lhes provocar desmotivação. Assim, por vezes é necessário que o professor avance com pistas mais directas para um caminho possível a seguir na exploração da tarefa, lembrando, por exemplo, situações já exploradas anteriormente e cujas estratégias poderão ser análogas às que os alunos poderão implementar.

Algumas vezes, o aluno também pode seguir por caminhos que o professor nunca tinha pensado e que levam ao aparecimento de resultados inesperados. Assim, o professor precisa de estar atento a essas descobertas e disponível para perceber e dar continuidade a esses caminhos.

Durante a fase de discussão o professor, na sua função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos. Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. É também esta a altura adequada para se clarificarem ideias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados.

Ao organizar a fase de discussão o professor deve conhecer bem o trabalho dos alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (Mason, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998). A altura para realizar esta discussão pode ser variável. O ideal é fazê-la logo após a exploração da tarefa, mas muitas vezes isso não é possível devido ao horário espartilhado dos alunos. Frequentemente o que acontece é que o desenvolvimento da actividade de investigação decorre numa aula e a discussão apenas na aula seguinte, o que dificulta o arranque da discussão final, pois os alunos, de uma aula para a outra, já não se lembram tão bem daquilo que fizeram e, de uma maneira geral, os registos escritos não são suficientemente ricos para os ajudar. Seria conveniente realizar o trabalho com investigações em aulas de duas horas, pois isso permitiria que a fase de discussão tivesse lugar na segunda hora, ou em parte dela. Por vezes, pode ser útil proporcionar um momento de discussão durante a realização da tarefa com o objectivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do



trabalho, ou mesmo de enriquecer a investigação. Na fase da discussão da aula apresentada anteriormente, e por questões de tempo, a professora optou por fazer uma pequena discussão final sobre as questões 1 e 2 e deixar a exploração e discussão da questão 3 para a aula seguinte. Inicialmente os alunos não estavam muito atentos ao que os colegas diziam, mas esta situação foi melhorando. A pouco e pouco os grupos manifestaram uma vontade crescente em intervir, chegando a querer falar todos ao mesmo tempo. Foram apresentadas diversas conjecturas ([quando a base é 2] *termina sempre em 4, 8, 6 e 2*), a professora encorajou os alunos a apresentar argumentos em defesa das suas afirmações (*o Daniel vai voltar a explicar*), confrontou-os com as opiniões dos colegas (*Estão de acordo com o Álvaro?... Porquê?*)...

A discussão final sobre a actividade dos alunos é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho, sabendo que esta é um elemento indispensável numa aula de investigação. Como referem Bishop e Goffree (1986) a aprendizagem não resulta simplesmente da actividade, mas sim da reflexão sobre a actividade. Deste modo, é fundamental, proporcionar aos alunos momentos onde possam pensar e sobretudo reflectir sobre a actividade realizada. Por um lado esta reflexão permite, por exemplo, valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que estes não conduzam a uma resposta final correcta, criando nos alunos uma visão mais verdadeira da Matemática. Por outro, permite estabelecer conexões com outras ideias matemáticas, com questões extra-matemáticas e pode constituir um ponto de partida para outras investigações.

### 3.2 A preparação de aulas de investigação

Para que a realização de actividades de investigação na aula de Matemática constitua realmente um momento de aprendizagem significativa para os alunos, torna-se necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas. Efectivamente, a variedade de processos em que os alunos se podem envolver, bem como o seu grau de complexidade e até de imprevisibilidade, exigem do professor uma preparação cuidada que vai para além da tarefa que propõe aos alunos. Ou seja, torna-se também necessária uma atitude por parte do professor que deve ser, também ela, de carácter investigativo e uma reflexão sobre os objectivos que se pretendem atingir com a realização de actividades de investigação.

Cabe, assim, ao professor participar activamente na elaboração do currículo, delineando objectivos, metodologias e estratégias, e reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática (Ponte et al., 1998). Ele precisa de decidir aspectos como:

- Qual o peso relativo a atribuir às actividades de investigação? Devem elas constituir-se como um eixo condutor do trabalho com os alunos, estão a par com outras actividades ou, pelo contrário, assumem um peso menor no currículo?

- Como se relacionam as investigações com os conteúdos a serem leccionados? Estes devem estar na sua base, ou a sua presença tem uma importância secundária? Os conteúdos podem surgir a partir da actividade ou esta deverá ser realizada depois de serem tratados?

A preparação das aulas de investigação propriamente ditas constitui outra fase importante. Em primeiro lugar há que seleccionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa, o que deve ter em conta vários aspectos. Por um lado, para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso o professor tem necessidade de fazer uma pesquisa em torno de vários materiais que podem variar entre manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e, mais recentemente, o mundo da Internet. Mas mais do que esta pesquisa, ele precisará de recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos. Por outro lado, esta escolha está também dependente dos alunos que a irão trabalhar, devendo o professor ter em conta o seu nível etário, o seu desenvolvimento matemático, a familiaridade que têm com o trabalho investigativo, os seus interesses, etc.

Além de preparar a tarefa, é necessário pensar na estrutura das aulas, por exemplo, no modo de trabalho dos alunos. É muito habitual neste tipo de actividade organizar os alunos em pequeno grupo, mas cabe ao professor decidir se a realização da tarefa poderá constituir uma oportunidade para trabalho individual, em pequeno grupo ou mesmo no grupo-turma. Para além da organização dos alunos, deve ser considerada a realização de diferentes momentos durante as aulas, bem como a respectiva gestão do tempo. A realização de aulas de investigação comporta, como vimos, três fases distintas a introdução da tarefa, a sua realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta. No entanto, mesmo a adopção desta perspectiva requer muitas outras decisões: A introdução deverá ser breve, mencionando apenas aspectos de gestão do trabalho da turma, ou poderá conter uma exploração inicial da tarefa? Na fase de realização, que questões ou dicas poderão ajudar os alunos? Durante a discussão, como promover a participação dos vários alunos?

Outra opção a tomar é relativa à utilização de materiais. Se é verdade que em alguns casos basta-nos o enunciado da tarefa e material de escrita, é também verdade que a utilização de recursos, como *software* dinâmico de Geometria (caso do Cabri ou GSP) ou *software* de cálculo simbólico (como o DERIVE) proporciona a realização de investigações bastante interessantes que, de outro modo se tornariam difíceis ou mesmo impossíveis de realizar.

Estas são algumas das questões a que o professor deve atender na preparação das aulas de investigação. A importância desta fase é tanto maior quanto menor for a experiência do professor na realização de trabalho investigativo, pois ela constitui um reforço bastante significativo para a segurança que sente no seu desempenho, durante estas aulas. Contudo, é preciso não esquecer que esta é apenas uma base de trabalho e que o professor deve estar preparado para alterar a sua agenda consoante o rumo dos acontecimentos, sendo que a capacidade de reflexão na acção é aqui particularmente importante.

### *3.3 Reflectir sobre o trabalho realizado*

Se a preparação das aulas de investigação constitui um momento necessário, não menos importante é a reflexão sobre o trabalho realizado. Nela cabem essencialmente duas avaliações:

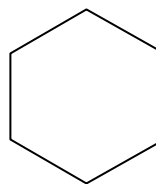
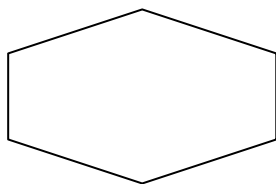
- Uma avaliação sobre a forma como decorreram as aulas e que conduz a questões como: A tarefa mostrou-se adequada aos objectivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram úteis? A organização dos alunos foi pertinente? Deve ser alterada? A introdução da tarefa foi suficiente? A gestão do tempo foi boa? Que dificuldades foram sentidas?...
- Uma avaliação (ainda que informal) sobre o trabalho e a aprendizagem dos alunos e que se debruça sobre questões como: De que forma reagiram os alunos à tarefa? Como está a evoluir a sua relação com as investigações? Em que tipo de processos (questionar, conjecturar, testar, provar...) demonstram maior facilidade ou dificuldade? Como se está a desenvolver a sua capacidade de expressar ideias matemáticas (oralmente ou por escrito)?

Esta reflexão torna-se bastante importante por várias razões. Por um lado, ela informa o professor sobre o trabalho futuro sugerindo o reforço, manutenção ou diminuição deste tipo de trabalho, apontando estratégias mais apropriadas para a sua realização, alertando para obstáculos ou condições facilitadoras a ter em conta. Por outro lado, a reflexão constitui-se também como um momento de aprendizagem do professor sobre outras formas que possibilitem o melhor desempenho do seu papel, atendendo também a um maior conhecimento que vai construindo sobre os seus alunos, sobre as actividades de investigação e sobre a relação destas com a aprendizagem dos alunos.

Algumas situações concretas ajudam-nos a perceber a importância desta reflexão. Consideremos a tarefa “Poliedros” proposta a uma turma de 10º ano, no âmbito do estudo da Geometria.

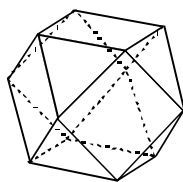
<b>Poliedros</b>
------------------

Observa os dois polígonos seguintes:

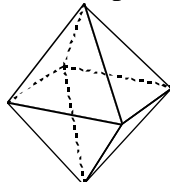


Ambos são hexágonos. Mas do da direita dizemos que é **regular**, porque tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes. O da esquerda apenas tem os lados congruentes, e não os ângulos internos. Por isso Euclides, um matemático grego que viveu há 2300 anos, dizia, em vez de polígono regular, polígono equilátero (lados iguais) e equiângulo (ângulos iguais).

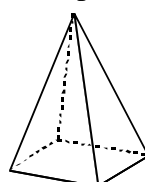
No espaço existem, além dos polígonos, poliedros. Observa com atenção os quatro poliedros seguintes e tenta ver como poderíamos aplicar também a palavra **regular** aos poliedros.



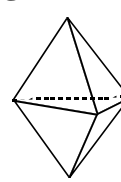
**A**



**B**



**C**



**D**

Observa os tipos de vértices e de faces que têm estes poliedros e vê se poderíamos chamar a algum deles regular. Explica a tua ideia. Diz depois qual seria a tua definição de poliedro regular.

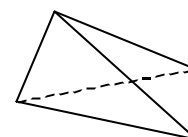
A partir da análise de alguns poliedros, os alunos deveriam chegar a uma definição de poliedro regular por analogia com a definição de polígono regular no plano. Naturalmente, surgiram algumas dificuldades. Para além dos problemas com a terminologia adequada (que não são muito relevantes), uma das principais questões é perceber o que equivale, no espaço, ao lado nos polígonos. Outra questão que surge é derivada do facto da igualdade de ângulos no plano se confundir com a igualdade de amplitudes. Ora no espaço não há equivalente para isto, não tem sentido falar de amplitude de um ângulo sólido. Uma aluna teve a intuição de que seria preciso somar os ângulos das faces que concorrem no mesmo vértice, ideia que já Descartes tinha tido mas que, neste caso, não resolve.

Depois de algum trabalho, os alunos acabaram por formular condições como:

- as faces devem ser todas iguais;
- as faces devem ser polígonos regulares;
- os vértices devem ser congruentes;
- ...

Durante a discussão, levantou-se a questão sobre a necessidade de enunciar todas as condições. Em particular, um aluno formulou a questão: *se as faces forem todas iguais e os vértices congruentes, as faces não serão necessariamente polígonos regulares?* Ora esta questão, absolutamente pertinente, não teve resposta imediata por parte da professora. De facto, todos os poliedros que conhecia com as faces iguais e os vértices congruentes, tinham também as faces regulares. Agora estava ela própria diante de um novo problema.

Resolveu então dedicar-se a ele em casa, pediu ajuda a um colega e encontraram um poliedro chamado disfenóide que satisfaz as duas primeiras condições sem satisfazer a última. A resposta foi encontrada: é necessário enunciar as três condições para termos



Disfenóide

um poliedro regular. Mas, mais do que isso, este exemplo alertou a professora para o interesse de discutir esta questão com os alunos e, para isso, considerou pertinente, no futuro, passar a incluir o caso do disfenóide entre os poliedros inicialmente apresentados na tarefa.

Esta história ilustra assim a importância do professor reflectir sobre os acontecimentos da sua aula. Essa reflexão ajuda-o a perceber o alcance do trabalho que desenvolve com os seus alunos, os problemas que levanta e de que forma podem ser ultrapassados. Ajuda-o a ter uma imagem mais completa daquilo que os alunos sabem e são capazes e, sobretudo, de que forma pode potenciar o desenvolvimento desses conhecimentos e capacidades.

### 3.4 Investigar sobre a prática

A realização de investigações por parte dos alunos não deve ser, na nossa perspectiva, uma actividade esporádica — pelo contrário, deve ser uma actividade frequente e regular na sala de aula. Para que isso aconteça é importante que os professores concebam projectos de trabalho nas suas escolas onde a actividade investigativa possa assumir uma presença importante. Na verdade, são muitos os obstáculos que se levantam à prática regular deste tipo de actividades, tornando-se extremamente penoso para o professor defrontá-los isoladamente.

Alguns dos obstáculos estão directamente relacionados com o próprio professor e envolvem, por exemplo, (i) o seu conhecimento de certos tópicos, eventualmente mais reduzido, (ii) uma experiência pessoal limitada na realização de trabalho de cunho investigativo, (iii) algum receio relativamente às questões matemáticas e (iv) às questões de dinâmica da aula que podem emergir neste tipo de trabalho. Trata-se de questões que podem ser ultrapassadas pela experimentação controlada, pela reflexão continuada sobre as aulas realizadas, pelas trocas de experiências com outros colegas.

Outros obstáculos resultam de aspectos do contexto escolar onde o professor está inserido. As coisas são mais difíceis quando não existe uma cultura que valorize as actividades de investigação matemática, nomeadamente a nível do grupo disciplinar, quando há falta de

espaços de trabalho, para os professores trocarem experiências entre si, quando há falta de livros e materiais com sugestões de tarefas, relatos de experiências e orientações curriculares, e quando a estrutura organizativa da escola é demasiado rígida (impedindo, por exemplo, a utilização de espaços e tempos mais flexíveis de trabalho do que as aulas de 50 minutos).

A cultura da escola pode ser um elemento fundamental para a criação de uma atmosfera de encorajamento à experimentação e inovação curricular. Mas uma cultura favorável a estes processos não se cria por decreto. Constrói-se, lentamente, pela prática colaborativa de professores empenhados em projectos inovadores comuns. Esses projectos podem assumir múltiplas vertentes, envolvendo a programação de aulas e actividades a realizar com os alunos, a criação de espaços de trabalho propícios à realização de trabalho investigativo, a criação de bancos de recursos e materiais como livros, revistas, *dossier* com tarefas, listas de endereços de Internet dedicados ao tema das investigações e a temas relacionados com este tipo de trabalho.

A existência de materiais diversos, de qualidade e acessíveis aos professores é certamente um elemento importante para a generalização deste tipo de trabalho. Esses materiais podem incluir tarefas para os alunos dos diversos níveis de escolaridade, relatos de experiências, e documentos de orientação curricular. A nossa perspectiva é que muitos desses materiais podem ser produzidos e organizados nas escolas pelos professores. Deste modo, eles não serão simples consumidores de materiais produzidos por outros, mas podem desempenhar igualmente um papel extremamente importante na sua produção.

Do mesmo modo que a realização de investigações matemáticas constitui um poderoso meio de aprendizagem matemática para o aluno, a realização de investigações sobre a sua prática constitui um poderoso meio de desenvolvimento profissional e de formação para os professores. A realização de projectos de investigação, a nível da escola ou de pequenos grupos de professores, poderá ser um modo privilegiado para desenvolver nos professores os saberes necessários à realização de actividades de investigação.

Estes projectos podem assumir natureza muito diversa. Podem respeitar apenas o trabalho realizado na sala de aula ou articular trabalho realizado em vários espaços escolares e extra-escolares. Podem envolver actividades mais formais, com elaboração de relatórios escritos ou combinar aspectos formais e informais. Podem envolver a recolha de dados através de vídeos, observações directas dos alunos, questionários, bem como a análise dos relatórios por eles produzidos. Em qualquer caso, estes projectos, para assumirem um cunho verdadeiramente investigativo devem ter as características fundamentais que marcam a realização de qualquer investigação em qualquer domínio:

1. Uma **questão** (ou um conjunto de questões) bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta.

2. Uma **conjectura** (ou um conjunto de conjecturas), informada por experiência anterior e por princípios educativos sólidos, que indique as direcções de trabalho a prosseguir.
3. A realização de **testes** práticos, pondo à prova as conjecturas, através da realização de experiências na sala de aula e da recolha de dados indicando os respectivos resultados.
4. A **validação** dos resultados obtidos, através de uma análise de dados cuidadosa, da construção de uma argumentação que evidencie o alcance do trabalho feito e da respectiva divulgação.

#### 4. Considerações finais

Indicámos, nesta conferência, as razões que justificam a realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, bem como os principais aspectos de que esse trabalho se pode revestir. Muitas das ideias apresentadas terão de ser objecto de mais experimentação e investigação. Mas uma coisa parece ser certa: A realização de trabalho de cunho investigativo, constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor. Continuar a procurar respostas para essas questões, na formação inicial, com professores em serviço, junto de alunos dos diversos níveis de ensino, constitui um desafio extremamente aliciante — e extremamente importante — para toda a comunidade de educação matemática portuguesa.

#### Referências

- Abrantes, P., Leal, L. C., & Ponte, J. P. (Eds.). (1996). *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
- Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados, e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 73-88). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classrooms: A pack for teachers*. Oxford: University of Oxford, Department of Education Studies.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1962/81). *Mathematical discovery* (3ª edição, combinada). New York: John Wiley.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfírio, & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.
- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água Editores
- Stewart, I. (1995). *Os problemas da matemática*. Lisboa: Gradiva.

---

<sup>1</sup> Diversas actividades realizadas pelo projecto estão, de resto, descritas com bastante pormenor nos livros Abrantes, Leal e Ponte (1996) e Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999).

<sup>2</sup> A tarefa completa pode ser encontrada no livro Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999).