Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

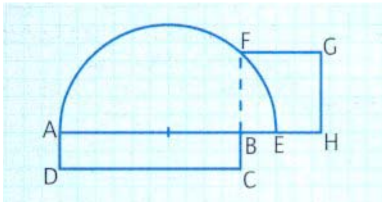
Ano Lectivo 2003/04 ***Quadraturas...*** **10.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

Introdução ao Trabalho

Uma das necessidades mais antigas das civilizações foi a medição de áreas. O quadrado é, sem dúvida, a figura mais simples e aquela com que parece ter sido intuitivamente mais fácil medir áreas desde todos os tempos. Talvez por isso, os antigos geómetras tentaram estudar as áreas de outras figuras, relacionando-as com o quadrado; por isso se usou a expressão "quadratura" do rectângulo, do triângulo, de um polígono e do círculo no sentido de procurar um quadrado com área igual à de cada uma daquelas figuras.

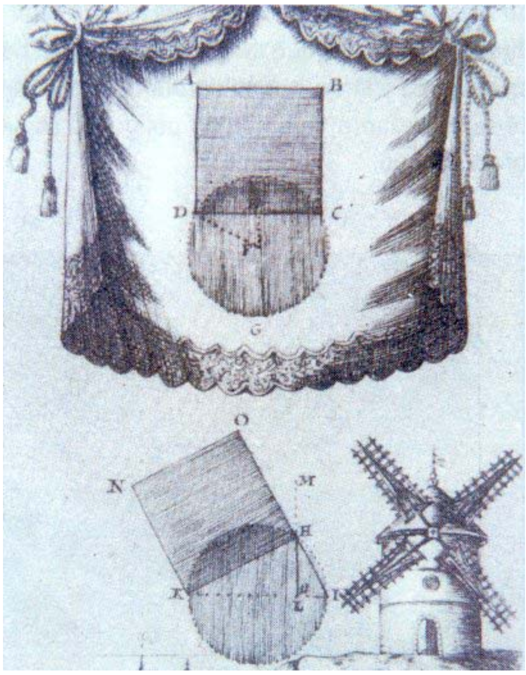
Euclides, na proposição 14, Livro II dos Elementos, apresenta a figura ao lado, em que [ABCD] é um rectângulo; $\overline{BE}$ é igual a $\overline{BC}$ e, construída a semicircunferência de diâmetro [AE] e determinado F, prolongando [BC] até à circunferência, Euclides afirma que o quadrado [FBHG] tem a mesma área que o rectângulo [ABCD].



Mas uma quadratura que fascinava os geómetras gregos era a quadratura de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de circunferência como as lúnulas.

O problema de achar um quadrado com a mesma área que um círculo dado, usando os instrumentos de Euclides, atravessou séculos e séculos de História, conheceu inúmeras tentativas de resolução e outras tantas soluções que mais tarde vieram a ser contrariadas. Por exemplo, o matemático português Pedro Nunes (1502-1578) provou, na sua obra *De erratis Orontii Finaee*, que estava errada a solução encontrada pelo francês Oronce Finée.

A mais antiga referência ao problema da quadratura do círculo que chegou até aos nossos dias consta do papiro de Rhind, copiado cerca de 1800 anos a. C. pelo escriba Ahmes, a partir de um documento já com um ou dois séculos de existência nessa altura. Para calcular a área de um círculo de diâmetro *d*, Ahmes subtrai $\frac{1}{9}$ de *d* a *d*, multiplica a diferença por *d* e subtrai a este produto a sua nona parte. Ou seja, o círculo fica associado a um quadrado cujo lado mede $\frac{8}{9}$ do seu diâmetro. Pode considerar-se que este é um óptimo resultado para a quadratura do círculo, tendo em conta outras tentativas entretanto conhecidas e cujos resultados estão mais afastados do valor da área do círculo.



Alain Manesson Mallet, 1702
Quadratura aproximada do círculo

Após numerosas pesquisas infrutíferas para encontrar a solução exacta para a quadratura do círculo, começou a levantar-se entre os matemáticos do séc. XVI a dúvida sobre a existência de tal solução. James Gregory tenta demonstrar a impossibilidade da quadratura (1667), mas é só em 1882 que o matemático Lindemann põe fim às dúvidas demonstrando cabalmente a inexistência de solução para o problema da "quadratura do círculo".

Adaptado de *Um pouco de História*, Infinito 10, pág. 50, Areal Editores, 1997

Trabalho

IMPORTANTE

São apresentadas algumas sugestões, que, eventualmente, podem ajudar a ultrapassar alguma dificuldade que vás encontrando ao longo da tua resolução.

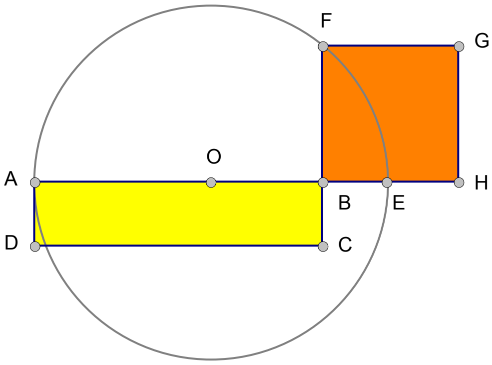
Podem ser dadas algumas indicações que esclareçam o significado dos enunciados das questões. Se tiveres necessidade, solicita-as.

***Nota**: As Sugestões apenas estão disponíveis no documento HTML correspondente a esta Ficha de Trabalho, em:*

http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-3.htm

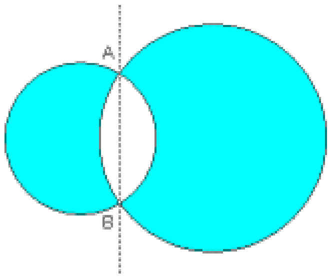
A. Prova a veracidade da proposição de Euclides:

Euclides, na proposição 14, Livro II dos Elementos, apresenta a figura ao lado, em que [ABCD] é um rectângulo; $\overline{BE}$ é igual a $\overline{BC}$ e, construída a semicircunferência de diâmetro [AE] e determinado F, prolongando [BC] até à circunferência, Euclides afirma que o quadrado [FBHG] tem a mesma área que o rectângulo [ABCD].



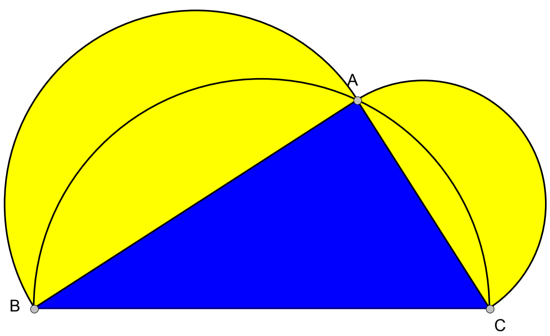
Sugestão A

B. Já no século V a.C., a geometria das áreas relativa a *figuras poligonais* constituía um domínio de vastidão apreciável e a sua extensão às *figuras curvilíneas* se apresentava como um problema de investigação matemática. A principal questão que se punha era a de, dado um círculo, construir com régua e compasso o lado dum quadrado com área igual à desse círculo. Como hoje se sabe, tal construção é impossível apenas com aqueles instrumentos. Mas Hipócrates de Quios conseguiu quadrar, no contexto da geometria plana da régua e do compasso, certas figuras curvilíneas chamadas *lúnulas*.



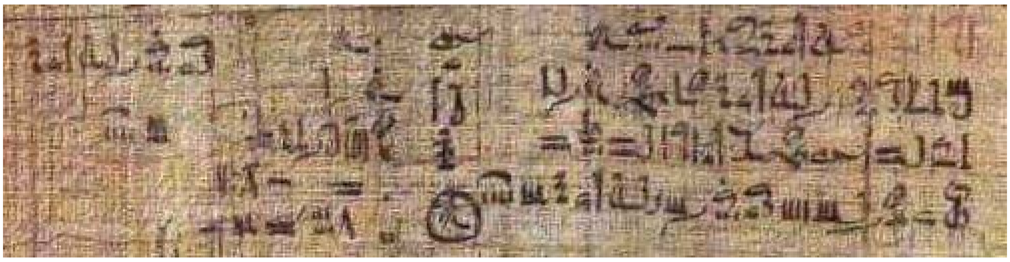
Duas circunferências complanares, com dois pontos em comum, A e B, dividem o plano em quatro regiões. Uma dessas regiões chama-se **lúnula**, se estiver contida nalgum dos dois semiplanos determinados pela recta AB; portanto, trata-se duma figura plana delimitada por dois arcos de circunferência com a concavidade no mesmo sentido.

Os três arcos são semicircunferências com centros nos pontos médios dos lados do triângulo [ABC].
Mostra que a área amarela é igual à área do triângulo.
Podes então concluir que nem sempre aparece π para calcular áreas de figuras em que intervêm círculos.



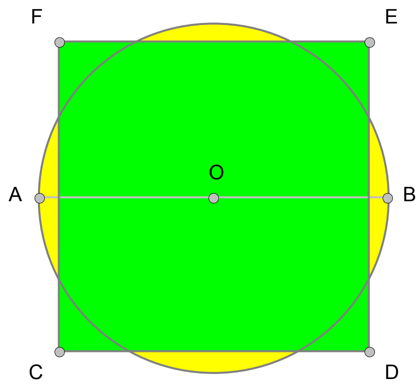
Sugestão B

C. Para calcular a área de um círculo de diâmetro *d*, Ahmes subtrai $\frac{1}{9}$ de *d* a *d*, multiplica a diferença por *d* e subtrai a este produto a sua nona parte. Ou seja, o círculo fica associado a um quadrado cujo lado mede $\frac{8}{9}$ do seu diâmetro.



Pode considerar-se que este é um óptimo resultado para a quadratura do círculo, tendo em conta outras tentativas entretanto conhecidas e cujos resultados estão mais afastados do valor da área do círculo.

Verifica os cálculos indicados e comprova o óptimo resultado para a quadratura do círculo.

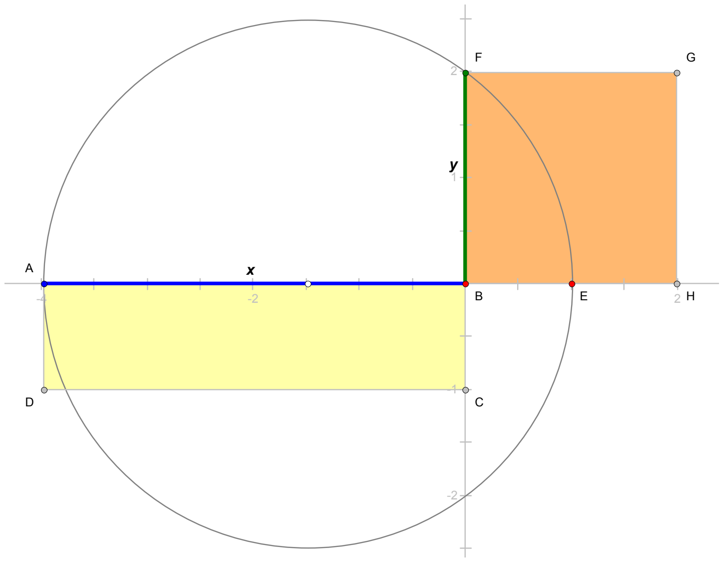


Sugestão C

D. Vamos regressar à proposição II.14.

A construção proposta por Euclides sugere um processo geométrico de construir um segmento de recta de comprimento igual à raiz quadrada do comprimento de um dado segmento.

Prova que, de facto, assim é: $y = \sqrt{x}$.



Sugestão D

E. A possibilidade da quadratura do círculo pela construção euclideana dependia inteiramente de π ser ou não algébrico. O teorema de Lindemann provou então a irracionalidade de π , e provou que o problema da quadratura do círculo é impossível pelas regras da geometria grega. Portanto a transcendência de π implica que não existe uma construção com régua e compasso, para construir um quadrado com igual área a um círculo dado. Isto é o fim da história de π e da quadratura do círculo.

Podes fazer uma viagem pela história de π , vendo o trabalho realizado em 1999/2000 por duas alunas da Escola Secundária Padre Alberto Neto (Queluz): http://joanario.no.sapo.pt/pi.htm.

FIM

O Professor