Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 ***Da duplicação do quadrado à redução de Hipócrates*** **10.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

Introdução ao Trabalho

Dos três famosos problemas clássicos da matemática grega - a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo - extremamente importantes no desenvolvimento da geometria, a duplicação do cubo foi talvez o mais famoso, na Antiguidade. A duplicação do cubo é um problema de enunciado muito simples e talvez por esse motivo tenha despertado o interesse de matemáticos, e não só, ao longo dos tempos. Mas a primeira questão que se coloca ao escrever sobre este problema é: ***como terá surgido o problema da duplicação do cubo*?**

Eutócio [1] reproduz a carta de Eratóstenes [2] ao rei Ptolomeu III Evergeta do Egipto [3], a qual contém duas lendas sobre o aparecimento do problema da duplicação do cubo. Conta assim:

"«Eratóstenes a Ptolomeu, saúde !

«Conta-se que um dos antigos poetas trágicos fêz aparecer Mino [4] em scena, no acto de mandar construir um túmulo a Glauco; e que Mino, verificando que este tinha de cada lado *cem pés de comprimento*, disse: «pequeno espaço na verdade concedeste ao sepulcro de um rei; duplica-o, conservando-lhe sempre a forma cúbica, ficarão imediatamente duplicados todos os lados do sepulcro». Ora, é claro que êle se enganava. De facto duplicando-se os lados duma figura plana, esta fica quadruplicada, e uma figura sólida ficará octuplicada.

«Então foi agitada entre geómetras a questão de saber como se podia duplicar uma dada figura sólida qualquer, conservando-lhe a forma. E êste problema foi chamado duplicação do cubo. Todos ficaram duvidosos, durante muito tempo, até que Hipócrates de Chios [5] achou que, «se entre duas linhas rectas, das quais a maior seja dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado»; transmudando-se, assim, uma dificuldade noutra não menor.

«Narra-se também que, mais tarde, os Délios, levados pelo oráculo [6] a dobrar um certo altar, caíram no mesmo embaraço. E alguns embaixadores vieram procurar os geómetras que conviviam com Platão na Academia [7], para os excitar a descobrir o que lhes era exigido. Êstes ocuparam-se do assunto com diligência, e diz-se que, tendo procurado *inserir duas meias entre duas rectas*, Arquitas Tarentino [8] o resolveu com o *semi-cilindro*, e Eudóxio [9] mediante certas *linhas curvas*.

«A êstes geómetras seguiram-se outros, que conseguiram tornar mais perfeitas as *demonstrações*, mas não a *construção* e a sua *exequibilidade prática*, exceptuando talvez Menecmo [10], e com grande trabalho»."

A autenticidade desta carta é posta em causa por alguns historiadores. O intelectual alemão U. von Wilamowitz-Moellendorff (1848-1931) defendeu que a carta não pode ser genuína. Apesar de poder não ter sido escrita por Eratóstenes, o desconhecido autor deu um grande contributo para a história da matemática ao ter incluído um importante e verdadeiro documento histórico - um epigrama de Eratóstenes, constante de uma placa fixa no templo de Ptolomeu, em Alexandria.

Retirado de *Duplicação do Cubo, História do Problema*; José Miguel Sousa
(http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/capitulo2.htm#s1)

Tema

Segundo Eutócio, Hipócrates de Quios terá observado que a resolução do problema da duplicação dum dado cubo é equivalente à resolução do problema da inserção de dois meios proporcionais entre o segmento de recta que é aresta do cubo e o segmento de recta duplo desse. Tratou-se duma descoberta muito importante, porque reduziu o problema inicial a um outro, abrindo deste modo uma nova frente de investigação que haveria de se revelar frutífera. [A]

Trabalho

***Nota**: As Sugestões apenas estão disponíveis no documento HTML correspondente a esta Ficha de Trabalho, em:*

http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-4.htm

A nova forma que Hipócrates deu ao problema da duplicação do cubo tem certas analogias com a questão da duplicação do quadrado que, por esta razão, lhe pode ter servido de inspiração. O problema da *duplicação do quadrado* consiste na construção (do lado) dum quadrado de área dupla da dum quadrado dado. O diálogo *Menon*, de Platão, escrito nos princípios do século IV a.C., toma patente que este problema não apresentava dificuldades para os gregos cultos do tempo: a diagonal dum quadrado é o lado do quadrado de área dupla. [A]

A. Dado um quadrado, mostra que a sua diagonal é o lado do quadrado de área dupla.

Sugestão A

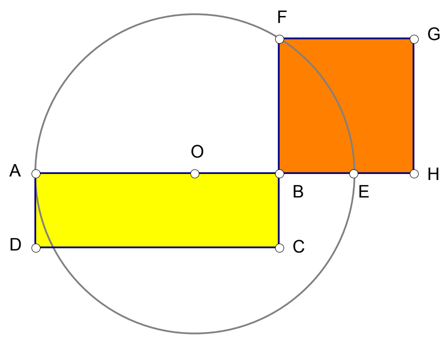
Mas a questão da duplicação do quadrado pode ser abordada de outro modo. Justapondo dois exemplares do quadrado dado, obtém-se um rectângulo em que um dos lados é duplo do outro. O problema em causa é a quadratura deste rectângulo, o que se resolve construindo o meio proporcional entre os respectivos lados: se o lado do quadrado inicialmente dado for designado por *l*, o rectângulo terá de lados *l* e *2l* e área igual à dum quadrado cujo lado *x* satisfaz a relação: [A]

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{2l}$$

B. A quadratura de um rectângulo pode ser feita considerando a proposição 14, do Livro II dos Elementos de Euclides:

Apresentando a figura ao lado, em que [ABCD] é um rectângulo; $\overline{BE}$ é igual a $\overline{BC}$ e, construída a semicircunferência de diâmetro [AE] e determinado F, prolongando [BC] até à circunferência, Euclides afirma que o quadrado [FBHG] tem a mesma área que o rectângulo [ABCD].

Prova a veracidade da proposição de Euclides.

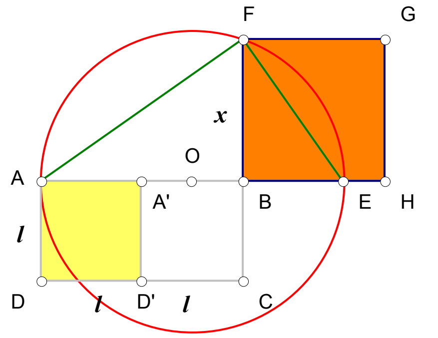


Sugestão B

C. Como foi referido na anterior caixa de texto, a questão da duplicação do quadrado pode ser abordada de outro modo. Justapondo dois exemplares do quadrado dado, obtém-se um rectângulo em que um dos lados é duplo do outro. O problema em causa é a quadratura deste rectângulo.

A figura ao lado mostra a construção relativa a essa quadratura.

Descreve a construção dessa quadratura e conclui que se verifica a relação $\frac{l}{x}=\frac{x}{2l}$, isto é, que o lado do quadrado [BFGH] é meio proporcional entre os lados do rectângulo [ABCD].

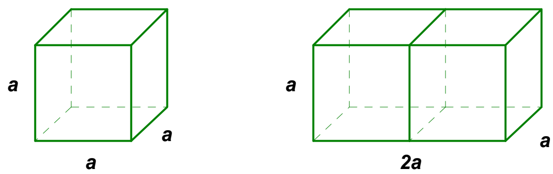


Sugestão C

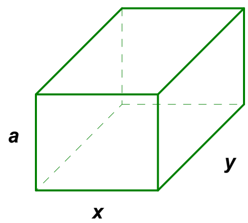
> Embora não haja nenhum testemunho directo desse facto, alguns historiadores acreditam que Hipócrates começou por reflectir na questão da duplicação do quadrado e, de seguida, procurou generalizá-la. Assim, terá observado que, para duplicar um cubo de aresta *a*, bastaria encontrar dois segmentos de recta *x* e *y* satisfazendo as relações
>
> $$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$
>
> Com efeito, a razão entre os volumes dos cubos de arestas *a* e *x* é:
>
> $$\frac{a^3}{x^3}=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}=\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{2a}=\frac{1}{2}$$
>
> Portanto, o cubo de aresta *x* tem volume duplo do do cubo de aresta *a*. [A]

D. Relativamente ao problema da duplicação do cubo, é possível que Hipócrates tenha efectuado um percurso análogo ao seguinte raciocínio: [B]

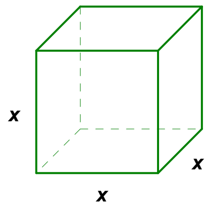
1. Consideremos um cubo de aresta *a*; juntando dois desses cubos obtemos um paralelepípedo de arestas 2*a*, *a*, e *a*, cujo volume é duplo do volume do cubo inicial.



2. Suponhamos, agora, que pretendemos transformar o paralelepípedo noutro com o mesmo volume, a mesma altura *a*, mas com uma das arestas da base *x*. Tendo em atenção que o volume terá de se manter o mesmo, a outra aresta da base terá de se alterar, designemo-la por *y*.



3. Finalmente vamos transformar o paralelepípedo da figura anterior num cubo, mantendo o volume, mas de aresta *x*.



Usando este raciocínio, mostra que podemos deduzir, como pretendíamos, que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$.

Sugestão D1	Sugestão D2	Sugestão D3	Sugestão D4

Não temos registos de que Hipócrates tenha sido capaz de construir os dois meios proporcionais a que se refere na sua redução do problema da *duplicação do cubo* ao problema dos *dois meios proporcionais*; aliás, será que ele procurou tal construção?

“Mais tarde os geómetras reconheciam claramente que uma *redução* não é ela própria equivalente a uma *solução* do problema proposto. Mas será que Hipócrates já fazia esta distinção no seu tratamento do problema da duplicação do cubo?

Depois de Hipócrates ter descoberto que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, parece que todo o esforço subsequente foi no sentido de encontrar uma construção para os dois meios proporcionais em causa. Estas buscas foram muito frutíferas no desenvolvimento da matemática, sendo um exemplo de tal facto a " (...) descoberta (ou, pelo menos, estudo atento) das secções cónicas."

É provável que Hipócrates tenha efectivamente provado a sua redução; caso contrário, seria de estranhar o facto de Arquitas, como parece, ter partido logo para a procura dos dois meios proporcionais como tentativa de solução para o problema da duplicação do cubo, tomando como certa a equivalência entre os dois problemas.

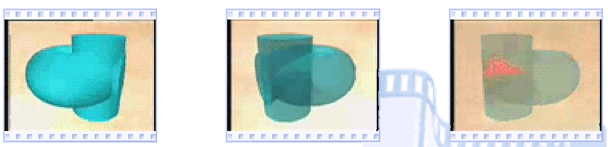
Arquitas de Tarento, geómetra do séc. IV a.C., é o autor da mais antiga solução para o problema da duplicação do cubo, da qual temos conhecimento através de uma passagem de Eudémio de Rodes reproduzida nos escritos de Eutócio.

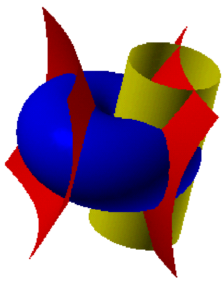
Pensamos que a notoriedade desta solução, de extrema beleza e absolutamente rigorosa, não lhe advém só pelo facto de ser a primeira mas, principalmente, por ser uma construção engenhosa a três dimensões (e não no plano). Esta construção envolve a procura de um certo ponto, obtido pela intersecção de três superfícies de revolução - um cone recto, um cilindro e um toro. A intersecção do cilindro com o toro é uma curva e o ponto pretendido obtém-se pela intersecção desta curva com o cone.

A solução proposta por Arquitas, além de ser uma solução de extrema beleza geométrica, revela uma excelente inovação por parte deste matemático, nomeadamente por utilizar movimentos mecânicos na solução de um problema geométrico. É a mais notável de todas, especialmente quando é considerada a sua data (primeira metade do século quarto a.C.), porque não é uma construção plana mas uma construção corajosa a três dimensões, determinando um certo ponto como a intersecção de três superfícies de revolução. [B]

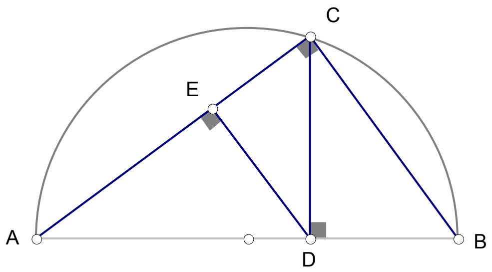
Visualização da construção de Arquitas: http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af18/arquitas/sup2.htm

Vídeo com a construção de Arquitas: http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af18/arquitas/videoarquitas.htm





E. Arquitas deve ter tido uma verdadeira inspiração divina quando encontrou a sua construção. A figura que Arquitas imagina em sua mente e a qual pretende construir é, evidentemente, o triângulo rectângulo [ABC] com as duas perpendiculares [CD] e [DE].



Mostra que é válida a proporção: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Assim , se $\overline{AB} = 2 \times \overline{AE}$, temos que [AD] é a aresta procurada, pois a proporção anterior pode escrever-se: $\frac{a}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{2a}$.

Então, a questão era situar correctamente o ponto C de tal modo que [ABC] fosse um triângulo rectângulo, onde ao construir os segmentos [CD] e [DE] se obtivesse $\overline{AB} = 2 \times \overline{AE}$.
E, como vimos, a solução proposta por Arquitas para encontrar o ponto C foi intersectar três superfícies, um cilindro, um cone e um toro.

Tal como acontece com a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, hoje sabe-se que a duplicação do cubo não pode ser levada a cabo com o exclusivo recurso à régua e ao compasso. É no entanto notável o desenvolvimento matemático provocado pelas tentativas infrutíferas de resolver estes três problemas da Grécia Antiga, durante mais de dois milénios.

Explora a animação seguinte:

http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/d_cubo.htm

Sugestão E

FIM

O Professor

[1] (480-540 d.C.) Matemático e comentador romano nascido em Ascalon, hoje Ashqelon, Palestina, importante pesquisador da obra de Arquimedes e de Apolônio. Embora não tenha feito qualquer trabalho original, a sua obra, como as de outros comentaristas, são fundamentais na história da matemática e muitos escritos importantes só sobreviveram devido ao trabalho desses comentaristas. Seus comentários são, portanto, inestimáveis do ponto de vista da natureza de informação histórica que, em caso contrário, estas informações originais estariam completamente perdidas.

[2] (276-194 a.C.) Matemático, astrónomo, geógrafo, historiador, poeta e atleta grego nascido em Cirene, hoje Shahhat, Líbia, conhecido por ter sido o primeiro a estimar o comprimento da circunferência terrestre e tratar, com maior ou menor profundidade, todas as ciências de seu tempo.

[3] Governou o Egipto (246-222 a. C.) e ficou conhecido como o Benfeitor. Tornou-se rei com a morte do pai, invadiu a Síria e a Índia e conquistou praias do Helesponto e costas da Trácia. No seu governo o Egipto alcançou o máximo de prosperidade e o mais extenso domínio.

[4] Minos, rei lendário de Creta (pai de Glauco), filho de Zeus e de Europa. Derrotou os Atenienses, obrigando-os depois ao sacrifício anual de 14 jovens para pasto do Minotauro (monstro com cabeça de touro e corpo de homem, filho de Pasífae, esposa de Minos, e do touro enviado por Posídon ao rei de Creta).

[5] (470-410 a. C.) Matemático geómetra grego de Chios, uma das ilhas do arquipélago de Dodecaneso, na Grécia actual, próxima e a oeste de Esmirna, na Turquia. Antes um próspero comerciante em sua terra natal, foi morar em Atenas (430 a. C.) e perdeu repentinamente a sua fortuna. Em consequência disso voltou-se para o estudo da geometria, tornando-se um dos responsáveis por mudanças fundamentais na matemática do século quinto antes de Cristo.

[6] Na Antiguidade, resposta que supostamente os deuses davam por intermédio dos seus intérpretes (sacerdotes e pitonisas).

[7] Akademia ou Hekademeia era originalmente um parque público, perto de Atenas, com alamedas e belas árvores, adornada com estátuas, templos e sepulcros de homens ilustres onde haviam sido plantadas oliveiras, onde o filósofo e matemático grego Platão (cerca de 385 a.C.) fundou a Academia, um local de estudo e de ensino de filosofia e ciência, que já tem sido considerado a primeira universidade do mundo.

[8] (428-365 a. C) Matemático, astrónomo, músico e político grego de Tarento, cidade colonial grega no sul da Itália, nas costas do Mediterrâneo, legítimo representante da escola pitagórica e de carácter platónico, foi um dos responsáveis por mudanças fundamentais na matemática do quinto século antes de Cristo e, de certa forma, também de transição na era platónica.

[9] (408-347 a. C) O mais célebre matemático, astrónomo e importante autor grego da Academia de Platão, citado enfaticamente nas obras de Euclides, Arquimedes e Aristóteles. Foi o descobridor da brilhante *teoria das proporções* (360 a. C.) entre grandezas de mesma espécie, descrita no Livro V de os Elementos de Euclides.

[10] (c 380-320 a. C) Matemático grego que terá sido o primeiro a representar curvas por meio de equações, no entanto de um modo um pouco primitivo. Também é o primeiro responsável pelo estudo das cónicas, utilizando as secções de cones na tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo.

[A] Adaptado de *HISTÓRIA DA MATEMÁTICA*, Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva e Maria José Costa, Universidade Aberta, 2000 (Pág. 309-311)

[B] Adaptado de *Duplicação do Cubo*, José Miguel Sousa (http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/capitulo2.htm)