Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

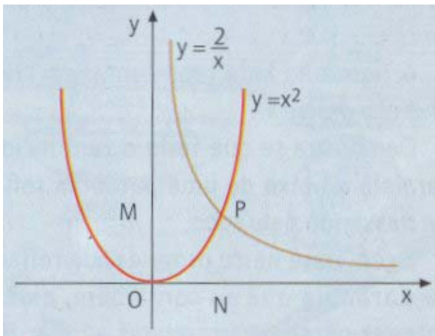
Ano Lectivo 2003/04 — ***Menecmo e as secções cónicas*** — **10.º Ano**

Nome: ______________________________________ N.º: ___ Turma: ___

Introdução ao Trabalho

Atribui-se a Menaecmus [1], matemático grego (séc. IV a.C.) que ensinou Alexandre, o Grande [2], o facto de ter sido o primeiro a considerar as cónicas na resolução de problemas, tais como o *problema da duplicação do cubo* [3] que o conduziu ao estudo da intersecção de uma hipérbole (um outro tipo de cónica que estudaremos mais tarde) com uma parábola.

O célebre *problema da duplicação do cubo* teve origem na Grécia Antiga e é também conhecido por "problema de Delos'". Diz a lenda que uma delegação da cidade de Atenas deslocou-se ao oráculo em Delos para perguntar como poderia ser combatida a peste que dizimava a cidade. Ainda segundo a lenda, o oráculo [4] respondeu que o altar de Apolo, que tinha forma cúbica, deveria ser duplicado. Os atenienses terão construído um novo altar com o dobro da aresta, mas daí resultou um cubo oito vezes maior... e a peste não foi eliminada!



O problema permaneceu para além da lenda e consistia em determinar, geometricamente, a medida da aresta de um cubo que tivesse o dobro do volume de um cubo dado. A solução da duplicação do cubo residia, afinal, na determinação do valor exacto $\sqrt[3]{2}$. Vários matemáticos da Grécia Antiga, bem como outros posteriormente, estudaram o problema e alguns encontraram uma solução por via geométrica.

O processo usado por Menaecmus consistia na determinação geométrica do ponto de intersecção de uma parábola com uma hipérbole.

Contudo, o problema de encontrar uma solução usando somente a régua e o compasso de Euclides só no séc. XIX se demonstrou [5] ser impossível.

Retirado de *Um pouco de História*, Infinito 10, pág. 255, Areal Editores, 1997

[1] (c 380-320 a. C) Matemático grego que terá sido o primeiro a representar curvas por meio de equações, no entanto de um modo um pouco primitivo. Também é o primeiro responsável pelo estudo das cónicas, utilizando as secções de cones na tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo.

[2] Imperador da Macedónia (356 a.C.-323 a.C.), filho de Filipe da Macedónia, construiu, no século IV a. C., um vasto império mediterrânico-asiático. Cabo de guerra excepcional, obteria vitórias muito significativas sobre os Persas. Teve um papel especialmente importante no incremento da influência helénica no Oriente.

[3] Um dos três problemas geométricos (trissecção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo) que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais, durante mais de dois mil anos, com início nos primeiros quatro séculos do período helénico (compreendido entre o século VI a.C. e o séc. V d.C.).

[4] Na Antiguidade, resposta que supostamente os deuses davam por intermédio dos seus intérpretes (sacerdotes e pitonisas).

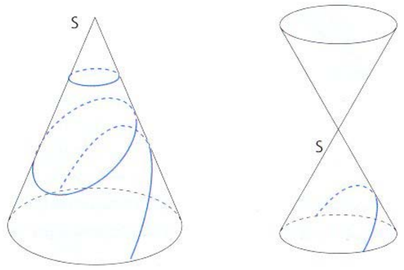
[5] Só em 1882, o matemático Lindemann põe fim às dúvidas demonstrando cabalmente a inexistência de solução para o problema da "quadratura do círculo".

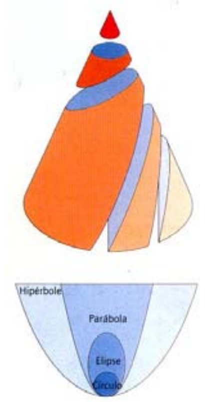
A parábola como secção cónica

O astrónomo e matemático grego Apolonius de Perga (260-200 a.C.) *baptiza as cónicas* com as designações ainda hoje utilizadas (elipse, parábola, hipérbole) e apresenta-as, no seu tratado "*Secções Cónicas*", como secções produzidas numa mesma superfície cónica, dependendo a natureza da cónica apenas da inclinação do plano secante às geratrizes da superfície cónica.

Quando se secciona uma superfície cónica por um plano paralelo a uma só das suas geratrizes, a linha obtida (cónica) é uma **parábola**.

Retirado de Infinito 10, pág. 254, Areal Editores, 1997

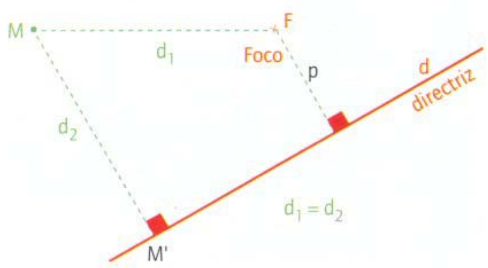




A parábola como lugar geométrico

Deve-se ainda aos matemáticos gregos da antiguidade a definição de parábola como *o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma recta – a **directriz** – e de um ponto exterior a ela – o **foco***.

Retirado de Infinito 10, pág. 254, Areal Editores, 1997



A parábola definida por uma expressão analítica

Depois do contributo de Descartes com o seu *método das coordenadas* e de um enorme aperfeiçoamento das notações matemáticas, a **parábola** aparece definida actualmente, de preferência, como sendo **toda a linha curva plana cujos pontos têm coordenadas (x, y) que obedecem a uma equação do tipo** $y = ax^2 + bx + c$ (com a, b e $c \in IR$ e $a \neq 0$) ou à equação que se obtém desta substituindo y por x e x por y.

Também pode ser representada por uma equação da forma $y^2 = \pm 2px$ (ou $x^2 = \pm 2py$), quando tem o vértice sobre a origem do referencial e um dos eixos coordenados é seu eixo de simetria, sendo ***p*** o *parâmetro da parábola*, igual à distância do foco à directriz.

A palavra "parábola", que significa "colocação ao lado" ou "comparação", foi escolhida para designar a curva em questão, dado que apresenta a seguinte propriedade: *para qualquer ponto sobre ela, a área do quadrado desenhado sobre a ordenada (abcissa) é igual à área do rectângulo cujos lados são a abcissa (ordenada) e o valor constante 2p*.

Retirado de Infinito 10, pág. 254, Areal Editores, 1997

Tema

Depois de Hipócrates ter descoberto que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, parece que todo o esforço subsequente foi no sentido de encontrar uma construção para os dois meios proporcionais em causa. Estas buscas foram muito frutíferas no desenvolvimento da matemática, sendo um exemplo de tal facto a " (...) descoberta (ou, pelo menos, estudo atento) das secções cónicas."

Menecmo (século IV a.C.) é o matemático mais antigo que os documentos associam com as secções planas do cone. De acordo com o resumo histórico de Proclo, tratar-se-ia dum irmão de Dinóstrato; é provável que ambos tenham estudado na Academia de Platão.

No seu comentário ao tratado *Da Esfera e do Cilindro*, de Arquimedes, Eutócio reproduz uma carta (que hoje se sabe não ser autêntica) de Eratóstenes, ao rei Ptolomeu III do Egipto, em que o autor teria afirmado:

Não procures conseguir coisas difíceis de executar por meio dos cilindros de Arquitas, nem pela tríade de secções cónicas de Menecmo, nem descrevê-las por alguma espécie de linhas curvas do divino Eudoxo; pois, por meio destas placas, construirás milhares de médias, começando por um pequeno número de base.

As «coisas difíceis de executar» são os dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta, que Arquitas de Tarento (séculos V-IV a.C.) teria encontrado por intermédio da intersecção de três superfícies. A solução proposta por Eudoxo de Cnido é hoje desconhecida. A *tríade de secções cónicas* de Menecmo é constituída pelos três tipos de curvas que se podem obter por intersecção dum cone de base circular com um plano, hoje conhecidas pelos nomes de *elipses, parábolas* e *hipérboles.*

Retirado de HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, Maria Fernanda Estrada, **Carlos Correia de Sá**, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva e Maria José Costa, Universidade Aberta, 2000, (Pág. 313-314)

As descobertas de Menecmo advieram da sua procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo, mais propriamente, da procura de curvas que possuíssem as propriedades adequadas à resolução do problema de encontrar os dois meios proporcionais da redução de Hipócrates. As soluções de Menecmo, preservadas por Eutócio, têm por base a construção de um certo ponto como a intersecção de duas cónicas, num dos casos uma parábola e uma hipérbole equilátera, no outro caso duas parábolas.

É este último caso, conhecido por *a segunda solução de Menecmo*, que irá constituir o assunto principal desta actividade.

É de salientar que essas construções de um certo ponto de intersecção de duas cónicas de maneira alguma indicam a forma de como Menecmo resolveu o problema, mas apenas mostram em termos modernos como a parábola e a hipérbole (ou duas parábolas) entram na solução do problema da duplicação do cubo. Isto é, este modo de encarar a questão, associando uma equação a uma curva, é inteiramente estranho à geometria antiga; com ele, apenas se pretende fazer notar que as duas questões matemáticas estão intimamente ligadas e que, portanto, as reflexões sobre uma delas podem ter conduzido, de maneira natural, à tomada de consciência acerca da outra.

Trabalho

***Nota**: As Sugestões apenas estão disponíveis no documento HTML correspondente a esta Ficha de Trabalho, em:*

http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-6.htm

A. Como já vimos, Hipócrates terá observado que, para duplicar um cubo de aresta *a*, bastaria encontrar dois segmentos de recta *x* e *y* satisfazendo as relações

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}\text{, onde } x \text{ é o valor da aresta do cubo com volume duplo do de aresta } a.$$

Para recordar este assunto, revê a Ficha de Trabalho "*Da duplicação do quadrado à redução de Hipócrates*", em:

http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-4.htm

Sugestão A

B. Para simplificar, consideremos que a aresta *a* do cubo a duplicar é a unidade de comprimento. Assim, bastaria encontrar dois segmentos de recta *x* e *y* satisfazendo as relações

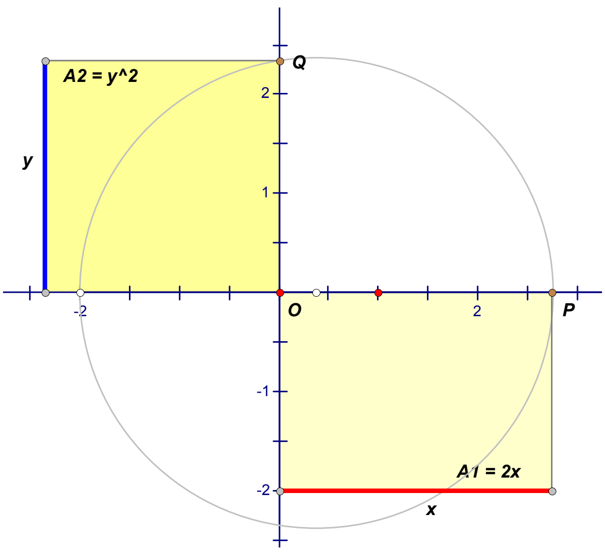
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

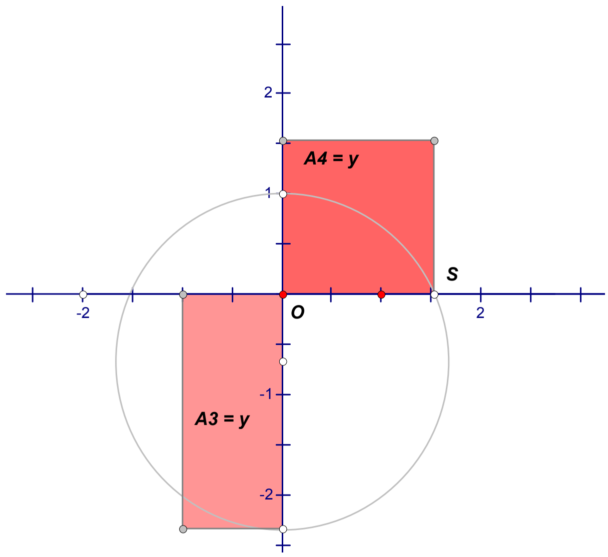
Ou seja, bastaria descobrir os dois meios proporcionais *x* e *y* que verificam simultaneamente as relações

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{2}\,.$$

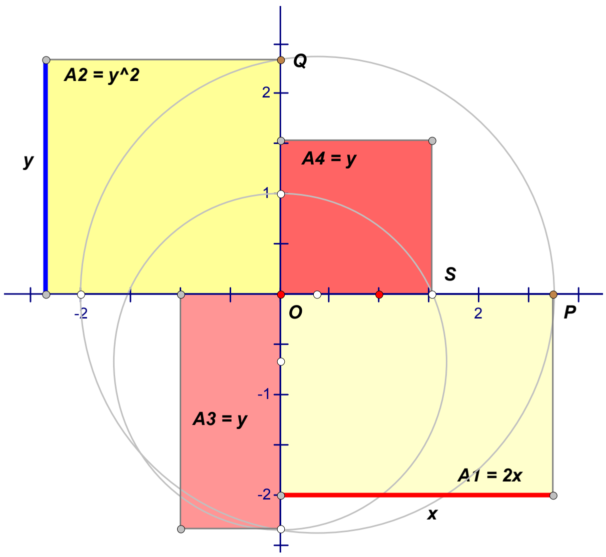
Ora, também já sabemos que a procura de um meio proporcional se pode reduzir a um problema de quadratura de um rectângulo.

À luz do exposto, explica as duas figuras apresentadas de seguida:



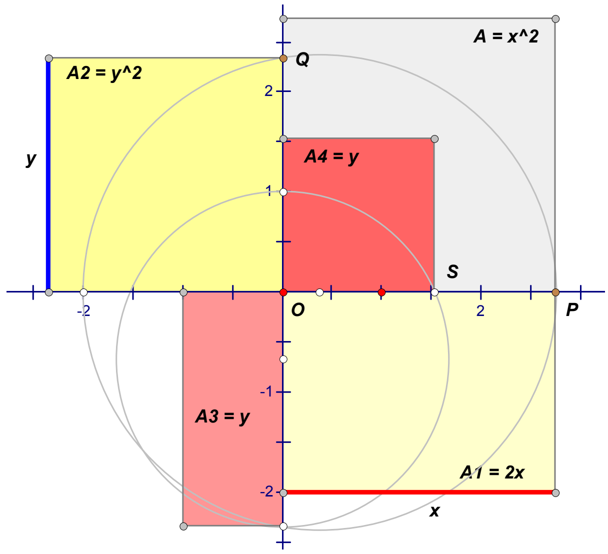


Podes ter uma melhor perspectiva, caso observes as figuras anteriores representadas simultaneamente:



Sugestão B

C. Observa a figura seguinte:



Justifica que o valor de *x* apresentado não é a solução do problema da duplicação do cubo.

Sabe-se que o ponto P é um ponto livre, que se pode deslocar no semieixo positivo Ox.
Justificando, sugere como descobrir uma solução aproximada do problema da duplicação do cubo e indica uma sua aproximação.

Sugestão C

D. Regressando ao exposto em **B**, confirma que da relação $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$ se podem obter as seguintes igualdades:

[A] $y = x^2$ **[B]** $y = \frac{2}{x}$ **[C]** $y^2 = 2x$

As expressões apresentadas em [A] e em [B] já te são familiares. A primeira define uma função quadrática e a segunda é uma função de proporcionalidade inversa, cuja representação gráfica é uma hipérbole, como certamente estás recordado do 9.º ano de escolaridade.

Usando a calculadora gráfica, implementa a resolução gráfica apresentada no texto introdutório desta ficha de trabalho e confronta o valor aproximado da solução do problema que obténs com o que indicaste na questão anterior.

Sugestão D

E. Pois é, tens toda a razão: A solução geométrica sugerida nas questões B e C não é correspondente com a que acabaste de resolver graficamente na questão D. De facto, na questão D foram usadas as relações [A] e [B], enquanto que nas questões B e C são sugeridas as relações [A] e [C].

Então, como implementar na calculadora gráfica esta *segunda solução* de Menecmo?
Bem, certamente, de forma análoga ao executado em D.
Só que há um pequeno problema! Sabes qual é?

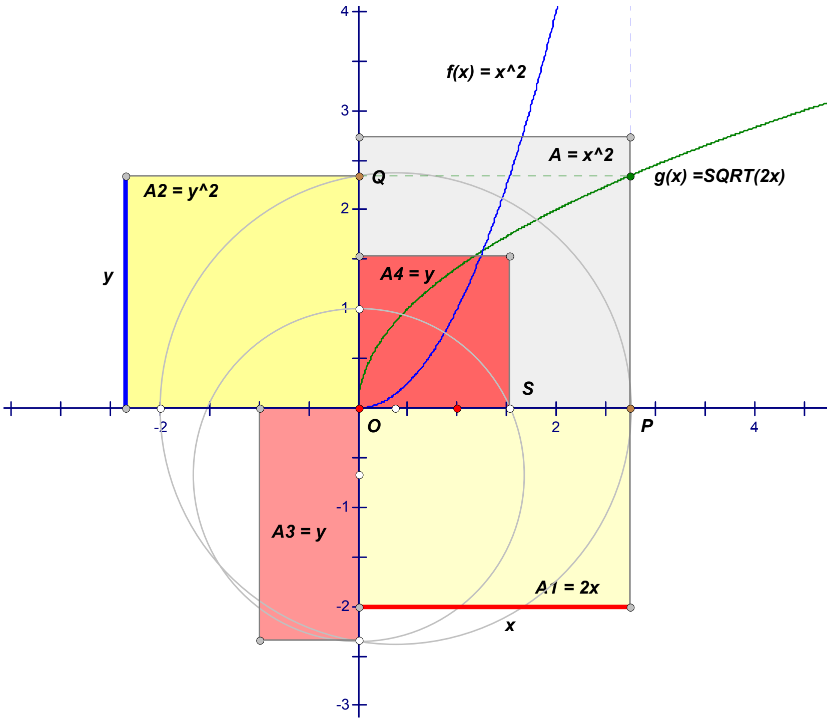
Ultrapassa este pequeno problema e determina um valor aproximado da solução do problema da duplicação do cubo, recorrendo agora à *segunda solução* de Menecmo?

As soluções aproximadas, indicadas em C, D e E estão relativamente próximas umas das outras?

Sugestão E

F. Pois é, é tudo muito bonito – dizes tu -, mas continuo a não perceber o que é que estas duas funções têm a ver com a resolução geométrica apresentada nas questões B e C.

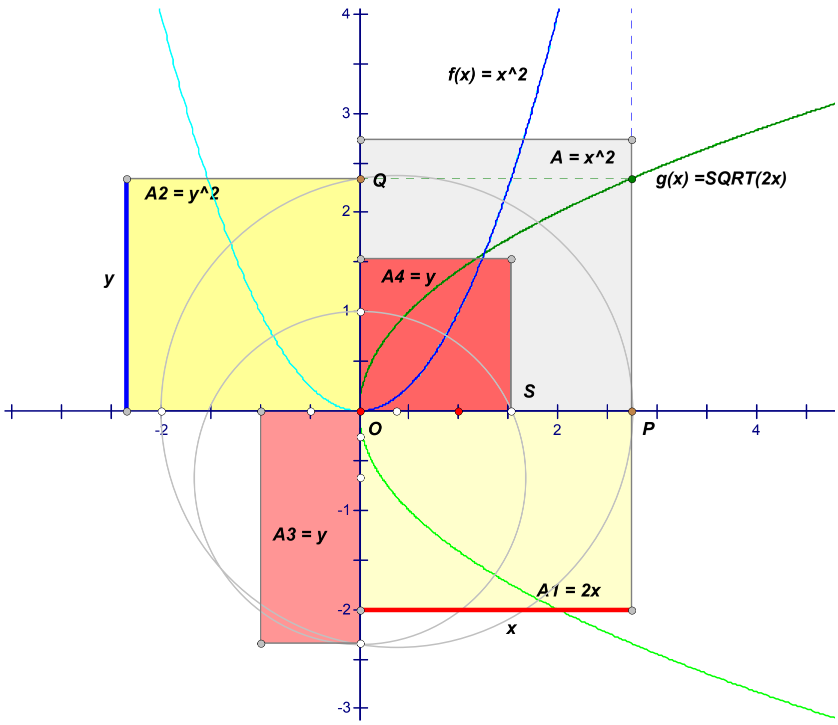
Então, dou-te uma ajuda:



Sugestão F

G. E onde estão as duas parábolas de que se falou atrás?

Então, dou-te outra ajuda:



Qual é a razão que justifica que o valor de *x* procurado é a abcissa do ponto de intersecção (diferente da origem) das duas parábolas? Identifica as directrizes e os focos das duas parábolas consideradas, assim como as suas expressões analíticas.

Sugestão G

H. Explora o sketch [menecmo.gsp](http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/menecmo.gsp) (http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/menecmo.gsp).

Descreve e justifica as construções utilizadas para a construção das duas parábolas.
Confirma as directrizes e focos que indicaste na questão anterior.

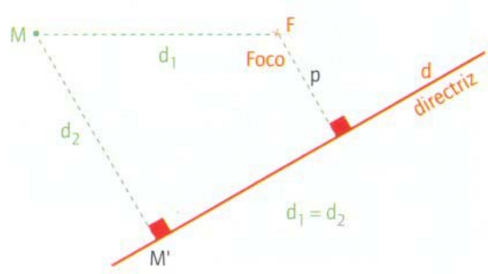
Toma novamente atenção à solução geométrica apresentada nas questões B e C, assim como às caixas de texto relativas a: ***A parábola como lugar geométrico*** e ***A parábola definida por uma expressão analítica***.
Explica porque é que essas construções de um certo ponto de intersecção de duas cónicas entram na solução do problema da duplicação do cubo.

Sugestão H

A parábola como lugar geométrico

Deve-se ainda aos matemáticos gregos da antiguidade a definição de parábola como *o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma recta – a* ***directriz*** *– e de um ponto exterior a ela – o* ***foco***.

Retirado de Infinito 10, pág. 254, Areal Editores, 1997



A parábola definida por uma expressão analítica

Depois do contributo de Descartes com o seu *método das coordenadas* e de um enorme aperfeiçoamento das notações matemáticas, a **parábola** aparece definida actualmente, de preferência, como sendo **toda a linha curva plana cujos pontos têm coordenadas (x, y) que obedecem a uma equação do tipo** $y = ax^2 + bx + c$ (com a, b e $c \in IR$ e $a \neq 0$) ou à equação que se obtém desta substituindo y por x e x por y.

Também pode ser representada por uma equação da forma $y^2 = \pm 2px$ (ou $x^2 = \pm 2py$), quando tem o vértice sobre a origem do referencial e um dos eixos coordenados é seu eixo de simetria, sendo ***p*** o *parâmetro da parábola*, igual à distância do foco à directriz.

A palavra "parábola", que significa "colocação ao lado" ou "comparação", foi escolhida para designar a curva em questão, dado que apresenta a seguinte propriedade: *para qualquer ponto sobre ela, a área do quadrado desenhado sobre a ordenada (abcissa) é igual à área do rectângulo cujos lados são a abcissa (ordenada) e o valor constante 2p*.

Retirado de Infinito 10, pág. 254, Areal Editores, 1997

É de salientar que essas construções de um certo ponto de intersecção de duas cónicas de maneira alguma indicam a forma de como Menecmo resolveu o problema, mas apenas mostram em termos modernos como a parábola e a hipérbole (ou duas parábolas) entram na solução do problema da duplicação do cubo. Isto é, este modo de encarar a questão, associando uma equação a uma curva, é inteiramente estranho à geometria antiga; com ele, apenas se pretende fazer notar que as duas questões matemáticas estão intimamente ligadas e que, portanto, as reflexões sobre uma delas podem ter conduzido, de maneira natural, à tomada de consciência acerca da outra.

FIM

O Professor