Escola Secundária da Sé-Lamego

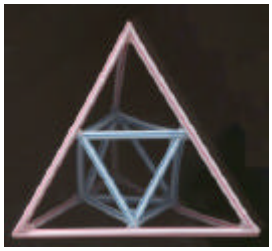
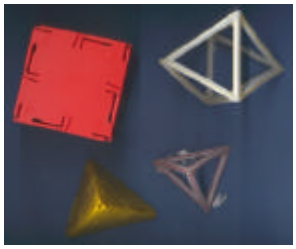
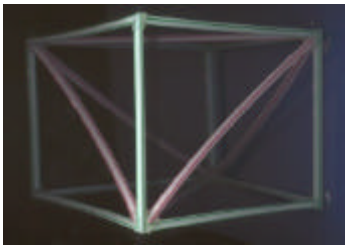
Ficha de Trabalho de Matemática

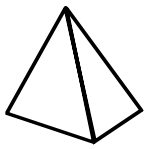
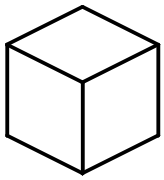
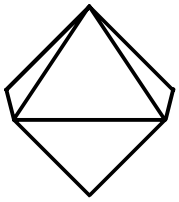
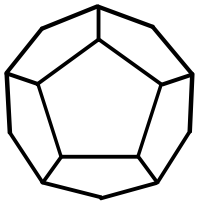
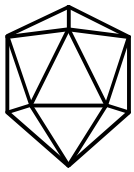
Ano lectivo 2002/03 ***Os Sólidos Platónicos*** **10.º Ano**

Trabalho de Grupo

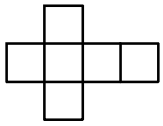
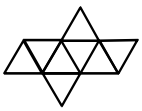
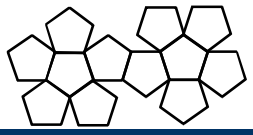
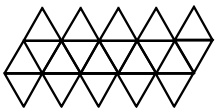
Porque é que há só 5 sólidos platónicos?

É esta e outras questões que vais tentar responder seguidamente, utilizando os diversos materiais disponíveis no Laboratório de Matemática.

tetraedro **cubo** **octaedro** **dodecaedro** **icosaedro**

Os cinco sólidos platónicos e as suas planificações

Os Sólidos Platónicos

Entre a grande variedade de **poliedros** - *sólidos com faces planas* – distinguem-se os sólidos regulares ou platónicos, que Platão[i] celebrizou no diálogo "Timaeus". Desde há pelo menos 2.500 anos que têm despertado a atenção do homem, devido à sua regularidade e conexões com a natureza.

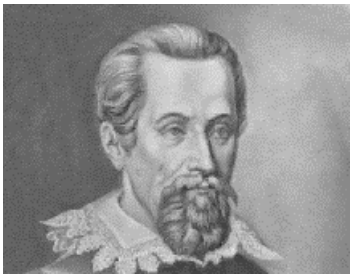
Platão (428-347 a.C.)

Nos sólidos platónicos, as faces são polígonos regulares e o número e disposição desses polígonos em torno de cada vértice são iguais. São convexos, ou seja, podemos assentá-los numa mesa sobre cada uma das suas faces. Como Euclides[ii] mostrou 300 anos antes da nossa era, podem apenas existir 5 sólidos deste tipo. É fácil perceber que assim é...

Euclides (330-275 a.C.)

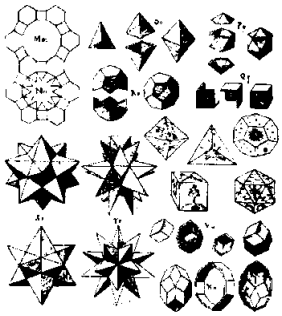
Um dodecaedro etrusco[iii], provavelmente datado de 500 a.C., foi encontrado nos arredores de Pádua, em Itália. Está no Museu Britânico, onde existe também um dado com a forma de um icosaedro, utilizado pelos antigos egípcios.

A razão do nome "platónicos", atribuído a estes cinco poliedros, resulta do facto de Platão, no diálogo já referido, ter associado quatro deles aos "elementos naturais"[iv] - terra, fogo, ar e água - que, na sua visão, compunham o universo.



Johanes Kepler (1571-1630)

Assim, associou o cubo à terra, o tetraedro ao fogo, o octaedro ao ar e o icosaedro à água. Quanto ao dedocaedro, ele representaria o universo, na descrição de Platão. A tradição de tentar dar significado ao facto de apenas haver cinco sólidos platónicos persistiu durante centenas de anos, e ainda no séc. XVII Kepler[v] tentou associá-los, embora sem êxito, às órbitas dos planetas. Num desenho de Kepler, do livro "Harmonices Mundi", publicado em 1619, podemos ver poliedros de muitos tipos, incluindo os platónicos, ilustrados com desenhos representando os elementos naturais correspondentes.



Desenho de Kepler, incluído no livro "Harmonices Mindi"

O fascínio pelos sólidos platónicos e pelos poliedros em geral tem permanecido até aos nossos dias, e exerce-se sobre camadas de público muito amplas. O leitor que queira obter uma panorâmica em termos acessíveis dos poliedros e das suas conexões com o mundo real pode consultar o excelente livro organizado por Marjorie Senechal e George Fleck, intitulado "Shaping Space, a polyhedral approach", ed. Birkhauser, Boston. Refere-se a um encontro, organizado há poucos anos numa universidade americana, em que participaram centenas de alunos, desde a escola primária até à Universidade, professores, artistas, cientistas, matemáticos, engenheiros, arquitectos, etc., tendo como centro de interesse comum os poliedros. Também em Portugal um grupo crescente de professores de Matemática tem constatado o interesse e gosto com que alunos de todas as idades e eles próprios se dedicam ao estudo e desenvolvem actividades de exploração no mundo dos poliedros.

Adaptado de um texto de Eduardo Veloso

Público Magazine, 5 de Março de 1995

1. Agora que terminaste a leitura do texto, deves estar com vontade de conhecer melhor esses poliedros.

Na página **ATRACTOR Matemática Interactiva**, em http://www.fc.up.pt/atractor/mat/Polied/fr_polied.htm, referem-se alguns poliedros.
Vamos considerar apenas os designados por **Sólidos Platónicos**.

a) Explora a página acima referida e completa a tabela seguinte:

Poliedro	Nome da face	n.º de lados por face	n.º de faces	n.º de vértices	n.º de arestas	n.º de arestas por vértice
			F	V	A	

Sugestão: Em caso de dificuldade de visualização, podes optar pelo programa Poly (com atalho no Ambiente de Trabalho) ou pela Aplicação Java em http://illuminations.nctm.org/imath/3-5/GeometricSolids/GeoSolids1.html.
Tens também modelos em madeira e podes construir os sólidos platónicos com os polígonos *Polydron*.

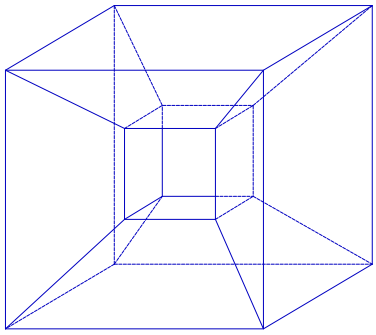
Sugestão: Determinar por contagem directa o número de arestas e de vértices do dodecaedro e do icosaedro poderá não ser tarefa fácil. Eis uma estratégia, por exemplo, para o icosaedro:

O icosaedro tem ___ faces. Cada face tem ___ vértices. Cada vértice é comum a ___ faces.
Logo o icosaedro tem ___ vértices.

O icosaedro tem ___ faces. Cada face ...

b) Para cada um dos 5 poliedros, calcula a soma das colunas **F** e **V**.
Compara o valor calculado com o da coluna **A**.
Que descobriste? Qual é a relação?

Nota: Essa relação é conhecida como a ***relação de Euler*** e é válida para qualquer poliedro convexo.
Se for caso disso, confirma as tuas contagens e rectifica a tabela.



c) Considera o sólido representado ao lado e o não platónico em http://illuminations.nctm.org/imath/3-5/GeometricSolids/GeoSolids1.html.

Para cada um dos casos, conta o número de vértices, faces e arestas.
Que concluis?

2. **Tetraedro**, **cubo**, **octaedro**, **dodecaedro** e **icosaedro**.

Por que razão haverá apenas 5 poliedros regulares convexos?
Utilizando os polígonos regulares de que dispões, constrói poliedros convexos com faces todas iguais.
Quantos poliedros regulares convexos consegues construir com:

a) triângulos equiláteros? Porquê?

b) quadrados? Porquê?

c) pentágonos regulares? Porquê?

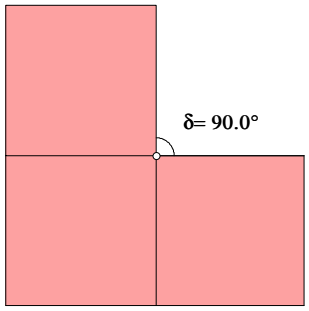
d) hexágonos regulares? Porquê?

De forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado, elabora um texto que, além da exposição das tuas conjecturas e das respectivas justificações, inclua também algumas ilustrações que tornem mais clara a tua investigação.

Apenas por curiosidade, consulta uma prova (http://www.mat-no-sec.org/criar/poliedros/demonstra.htm) de que os sólidos platónicos são 5.

3. Na geometria do espaço e na história das poliedros, Descartes introduziu a noção de *défice angular* ou *desvio esférico*. Um ponto no plano está rodeado, por assim dizer, por um ângulo de 360º. O mesmo acontece a um ponto sobre uma superfície esférica. Se pensarmos agora num vértice de um poliedro, podemos considerar que ele está "rodeado" pela soma dos ângulos planos medidos nas faces que concorrem nesse ponto.

Se considerarmos apenas poliedros convexos, a soma das amplitudes dos ângulos planos num vértice é sempre inferior a 360º. É natural então definir como défice angular d a diferença:



$$d = 360^{\circ} - (\text{soma das amplitudes dos ângulos em torno do vértice})$$

Por exemplo, nos vértices do cubo o défice angular é 90º.

a) Determina os défices angulares dos restantes sólidos platónicos.

b) Do ponto de vista de rolar melhor, qual o sólido platónico preferível para construir um dado? Justifica.

c) O *défice angular total* de um poliedro é a soma dos défices angulares.
Qual será o défice angular total de um poliedro regular convexo?

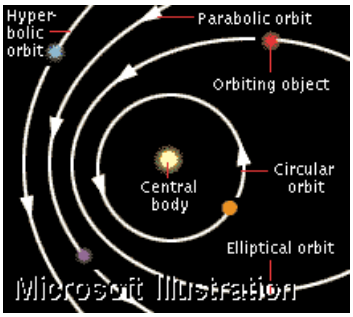
[1] (428-347 a.C.) Filósofo grego de origem aristocrática. Recebeu uma educação muito completa. Teve por mestre um discípulo de Heraclito, Sócrates, e mais tarde foi fortemente influenciado pelo pitagorismo. Conserva-se uma colecção de cartas de sua autoria e praticamente todas as suas obras filosóficas são escritas sob a forma de diálogo, e nas quais a figura principal é quase sempre Sócrates.

[ii] (Séc. III a.C.) Matemático grego. Autor de *Elementos*, obra em que recolhe todo o saber matemático dos seus antecessores e expõe os seus próprios postulados e axiomas, que deram origem à chamada *geometria euclidiana*. Talvez nenhum outro livro, além da Bíblia, se possa gabar de tantas edições em diversas línguas e certamente nenhuma outra obra matemática teve tanta influência como a exercida pelos Elementos: durante mais de dois mil anos, eles serviram como modelo de raciocínio lógico para todo o mundo, e pode afirmar-se que, durante todo esse tempo, todos os estudantes que aprenderam geometria, aprenderam-na de Euclides.

[iii] O natural ou habitante da Etrúria (região da Itália antigamente também chamada de Tuscia, que se estendia do rio Macra e dos Apeninos, ao Norte, até ao Tibre, a Este e Sul). Os Etruscos apareceram nos finais do Séc. VIII a.C. na Toscana, procedentes do Mediterrâneo Oriental. A sua prosperidade assentou nos minérios (ferro, prata e cobre), numa agricultura avançada e no comércio. Nos finais do Séc. VII a.C. apoderaram-se de Roma, onde reinou a dinastia dos Tarquínios. A sua decadência começou com a sublevação de Roma (510 a.C.), provocada pela tirania de Tarquínio, o *Soberbo*, com a derrota na batalha naval de Cumas frente a Hierão de Siracusa e com a conquista de Cápua pelos Samnitas (423 a.C.).

[iv] Em filosofia, cada um dos quatro componentes (terra, água, ar e fogo) que se consideravam como fundamentais e constitutivos dos corpos.

[v] Kepler, Johanes (1571-1630). Astrónomo alemão defensor das teorias heliocêntricas de Copérnico[6], que alguns apelidaram de "O Legislador do Céu". Influenciado pelo pitagorismo, convenceu-se de que tais números encerravam, numa oculta harmonia, a chave do universo e, após 22 anos de cálculos pacientíssimos, descobriu as célebres leis sobre o movimento dos planetas as quais, em sua homenagem, são conhecidas por Leis de Kepler e daí o motivo daquele epíteto elogioso acima referido. E assim formula a 1.ª lei: "Os planetas descrevem órbitas em forma de elipses de que o Sol é um dos focos". E logo a seguir a 2.ª lei: "O raio vector que une o centro do planeta com o do Sol descreve áreas proporcionais aos tempos empregados para as descrever". Nove anos depois descobre a 3.ª lei: "Os quadrados dos tempos de revolução dos planetas em torno do Sol são proporcionais aos cubos dos semieixos maiores das órbitas respectivas".

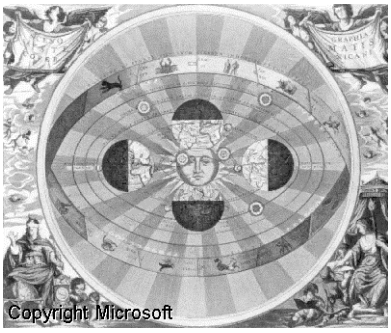


Tipos de órbita

[6] No séc. XVI, Nicolau Copérnico, astrónomo polaco famoso pela sua concepção heliostática do sistema solar, desenvolveu um modelo para o universo no qual o Sol era o centro em vez da Terra.

Nicolau Copérnico (1473-1543)

Isto desafiou o suposto desde o séc. II quando Ptolomeu propôs um modelo geocêntrico, que foi usado por astrónomos e religiosos por muitos séculos.



Modelo Coperniano

O Professor