Retome-se a noção de derivada de uma função *f* definida num intervalo aberto I, num ponto $x_0 \in I$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

A derivada em x_0 mede a rapidez de variação da variável dependente, quando a variável independente varia entre x_0 e $x_0 + h$.

Chama-se **taxa de variação média** de *f* em $[a,b] \subset I$ à razão $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Chama-se **taxa de variação instantânea** de *f* em $a \in I$ ao limite da taxa de variação média de *f* em $[a,b]$ quando *b* tende para *a*, ou seja à derivada de *f* em *a*.

A razão incremental $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **mede** então **a taxa de variação média** da função *f* entre x_0 e $x_0 + h$. **A derivada** é pois o limite quando h tende para zero da taxa de variação média de f entre x_0 e $x_0 + h$, isto é, **é a taxa de variação instantânea** de f em x_0.

Conforme se referiu, o conceito de derivada traduz matematicamente a ideia de rapidez de variação. Os fenómenos que mais facilmente sugerem a ideia de variação são os movimentos e, neste caso, a rapidez de variação é a velocidade do movimento. Considere-se um ponto P, que se move sobre um eixo, sendo a sua posição em cada instante t determinada pela sua abcissa $x = s(t)$; a função s traduz o movimento do ponto P. Considerando dois instantes distintos t_0 e t_1, com $t_0 < t_1$, o cociente $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ do espaço percorrido pelo tempo gasto no percurso, que é a taxa de variação média de $x = s(t)$ no intervalo $[t_0, t_1]$, é utilizado usualmente para dar uma ideia da rapidez do movimento de P neste intervalo, e chama-se **velocidade média** de P no intervalo $[t_0, t_1]$. Na mesma ordem de ideias, adopta-se como medida de **velocidade** de P no instante t_0 o limite quando t tende para t_0 da velocidade média no intervalo de extremos e t_0 e t (com $t \neq t_0$), caso esse limite exista, e escreve-se

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0),$$

ou, fazendo $h = t - t_0$,

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = s'(t_0)$$

Com a introdução das derivadas avançou-se extraordinariamente no estudo dos fenómenos naturais, sendo muito frequentes as situações em que intervem este conceito, já que o mundo está em constante movimento. Tenha-se presente que, embora "o infinito" não pertença ao mundo real, ele é absolutamente necessário para analisar o movimento e a mudança.

Após o estudo da velocidade, surge o exemplo da aceleração que, sendo a derivada da velocidade em ordem ao tempo, é indicativa da rapidez com que a velocidade varia em cada instante. São também exemplos concretos de derivadas os conceitos de caudal de uma corrente de água num dado instante, de intensidade de uma corrente eléctrica num dado instante e de calor específico de uma substância para uma dada temperatura, entre outros. São ainda de salientar as aplicações práticas do conceito de derivada a problemas de oferta e procura (exemplo 2) e outros, relacionados com a determinação de taxas de variação em situações como a ilustrada no exemplo 3.

Exemplos:

1. Suponha-se que a função que traduz o movimento de um corpo que desce um plano inclinado (por acção da gravidade) é $s(t) = 3t^2$. Supondo que a origem da contagem do tempo é $t_0 = 0$, qual a velocidade atingida ao fim de 3 segundos ?

A velocidade média entre os instantes $t_1 = 3$ e $t = 3 + h$ é dada por

$$\frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \frac{3(3+h)^2-27}{h} = \frac{27+18h+3(h)^2-27}{h} = \frac{3h(6+h)}{h}$$

A velocidade ao fim de 3 segundos é, então, $v(3) = \lim_{h \to 0} \frac{3h(6+h)}{h} = 18$, que é a derivada da função s no ponto $t_1 = 3$.