Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2004/05 — ***Descartes e a equação do 2.º grau*** — **10.º Ano**

1.ª Parte

René Descartes e *A Geometria*

A. Descartes é um dos grandes matemáticos de todos os tempos. Ele foi um dos fundadores da geometria analítica: a geometria passou a beneficiar da linguagem da análise, mais fácil de manejar e, por outro lado, a análise ganhou com o suporte intuitivo fornecido pela geometria. Foi no decorrer do ano de 1637 que Descartes concluiu o *Discurso do Método* acompanhado de três anexos, o último dos quais *A Geometria.* Escrita com a intenção de ilustrar matematicamente as considerações filosóficas gerais do *Discurso do Método* relativamente ao método científico, *A Geometria* é a única obra matemática publicada pelo filósofo e matemático, ocupando uma centena de páginas.

Lê com atenção o texto seguinte, extraído do Primeiro Livro de *A Geometria*:

Como o cálculo da aritmética se relaciona com as operações de geometria

E assim como a aritmética não compreende mais que quatro ou cinco operações, que são a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão e a extracção de raízes, que pode tomar-se como uma espécie de divisão, assim também não há outra coisa a fazer em geometria, com respeito às linhas que se desejam conhecer, que juntar ou subtrair outras, ou ainda, conhecendo uma, que designarei por unidade para relacioná-la o melhor possível com os números, e que geralmente pode ser escolhida arbitrariamente e, conhecendo logo outras duas, determinar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a outra está para a unidade, que é o mesmo que a multiplicação; ou ainda encontrar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a unidade está para a outra, o que é o mesmo que a divisão; ou, enfim, encontrar um, dois, ou vários meios proporcionais entre a unidade e alguma outra linha, o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, ou cúbica, etc. E não temerei introduzir estes termos de aritmética em geometria, a fim de tomar-me mais inteligível.

Quais são os problemas planos

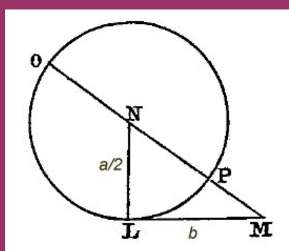
Se este pode ser resolvido pela geometria ordinária, quere dizer, sem utilizar mais que linhas rectas e circulares traçadas sobre uma superfície plana, depois de dar à última equação a forma reduzida, não restará, no final, mais do que um quadrado desconhecido, igual ao que resulta da adição, ou da subtracção, da sua raiz multiplicada por alguma outra quantidade também conhecida [coeficiente], mais alguma outra quantidade conhecida [termo independente].

Como se resolvem

E então esta raiz ou linha desconhecida, encontra-se facilmente. Se se tem, por exemplo,

$$z^2 = az + b^2$$

construo o triângulo rectângulo NLM, cujo lado LM é igual a b, raiz quadrada da quantidade conhecida b^2, e o outro LN é $a/2$, a metade da outra quantidade conhecida, que está multiplicada por z, que suponho ser a linha desconhecida. Logo, prolongando MN, base [hipotenusa] desse triângulo, até O, de modo que NO seja igual a NL,



a linha total OM, ou z, que é a linha buscada; ela expressa-se

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Extraído de *A Geometria* de René Descartes

2.ª Parte

René Descartes e *a equação* $x^2 = ax + b^2$

B. Descartes descreve um processo geométrico para resolver a equação do 2.º grau da forma $x^2 = ax + b^2$, com *a* e *b* positivos, e apresenta ainda uma fórmula para a obtenção da solução.

Usando a fórmula de Descartes, obtém as soluções das equações $x^2 = 6x + 16$ e $x^2 = 8x + 9$.

O valor encontrado para cada uma das equações será a única solução?
Resolve cada uma dessas equações de modo a obter todas as soluções.

Qual será o motivo pelo qual o método de Descartes não determina todas as soluções.

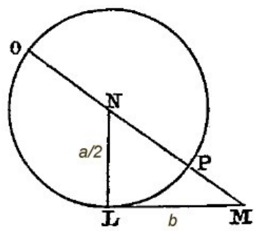
Notas alguma semelhança entre a fórmula de Descartes e a fórmula resolvente, tua conhecida? Justifica.

C. Foi construída uma animação de acordo com o processo geométrico descrito por Descartes.
Verifica nessa animação as soluções das equações indicadas em B, quer das seguintes:

$x^2 = 8x + 20$	$x^2 = 15x + 16$	$x^2 = 11x + 12$	$x^2 = 4x + 5$

Animação C

Mostra que $z = \overline{OM} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.



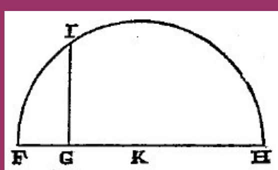
Nota: Descartes descreveu processos para a resolução de outros tipos de equações do 2.º grau, contudo nós apenas aqui consideramos as da forma $x^2 = ax + b^2$.

3.ª Parte

René Descartes e *a extracção da raiz quadrada*

D. Na construção anterior é necessário construir um segmento [LM], cujo comprimento é a raiz quadrada de um comprimento. Vamos ver como Descartes descreve o processo de extracção da raiz quadrada.

A extracção da raiz quadrada



Se se pretende extrair a raiz quadrada de GH, junta-se em linha recta FG, que é a unidade, e dividindo FH em duas partes iguais pelo ponto K, tomando este ponto como centro, traça-se o círculo FIH; elevando então desde o ponto G uma linha recta, formando ângulos rectos com FH, até I, é GI a raiz buscada. Nada digo aqui da raiz cúbica, nem das outras, pois delas tratarei detalhadamente mais adiante.

Resolve o exercício seguinte, relativo à construção descrita por Descartes.

Exercício 1

Solução 1

E. Justificando, mostra que, de facto, $\overline{GI} = \sqrt{\overline{GH}}$.
Em caso de dificuldade, considera a sugestão:

Sugestão 1

4.ª Parte

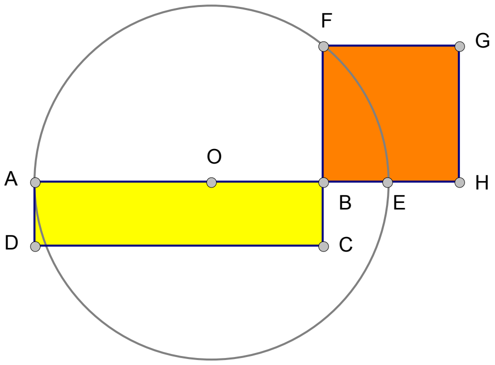
A extracção da raiz quadrada de René Descartes e *Elementos* II.14

Uma das necessidades mais antigas das civilizações foi a medição de áreas. O quadrado é, sem dúvida, a figura mais simples e aquela com que parece ter sido intuitivamente mais fácil medir áreas desde todos os tempos. Talvez por isso, os antigos geómetras tentaram estudar as áreas de outras figuras, relacionando-as com o quadrado; por isso se usou a expressão "quadratura" do rectângulo, do triângulo, de um polígono e do círculo no sentido de procurar um quadrado com área igual à de cada uma daquelas figuras (usando apenas régua não graduada e compasso).

Após numerosas pesquisas infrutíferas para encontrar a solução exacta para a quadratura do círculo, começou a levantar-se entre os matemáticos do séc. XVI a dúvida sobre a existência de tal solução. James Gregory tenta demonstrar a impossibilidade da quadratura (1667), mas é só em 1882 que o matemático Lindemann põe fim às dúvidas demonstrando cabalmente a inexistência de solução para o problema da "quadratura do círculo".

F. Prova a veracidade da seguinte proposição de Euclides:

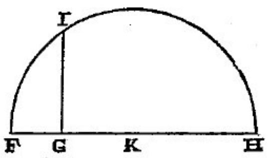
Euclides, na proposição 14, Livro II dos *Elementos*, apresenta a figura ao lado, em que [ABCD] é um rectângulo; $\overline{BE}$ é igual a $\overline{BC}$ e, construída a semicircunferência de diâmetro [AE] e determinado F, prolongando [BC] até à circunferência, Euclides afirma que o quadrado [FBHG] tem a mesma área que o rectângulo [ABCD].



Em caso de dificuldade, considera a sugestão:

Sugestão 2

G. Relaciona *a extracção da raiz quadrada* de Descartes com *a quadratura do rectângulo* de Euclides.



5.ª Parte

Para ir fazendo... e aprendendo

H. Para saberes mais sobre René Descartes:

- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm14/Descartes.htm
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/descartes/index.htm

I. Para conheceres como Descartes descreveu os processos para a resolução de outros tipos de equações do 2.º grau, além das da forma $x^2 = ax + b^2$ (em francês):

- http://www.prof2000.pt/users/amma/af33/tf/lageometrie1-11.pdf
- http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29040 (obra completa, em francês)

J. Para conheceres algo mais sobre a geometria de Descartes, em particular o assunto referido nesta ficha de trabalho (em francês):

- http://perso.wanadoo.fr/debart/geometrie/geom_descartes.html

L. Para saberes algo mais sobre Euclides de Alexandria:

- http://www.matematica.br/historia/euclides.html
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/index.htm

M. Uma ficha de trabalho sobre quadraturas:

- http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-3.htm

FIM