

Ficha de Trabalho de Matemática

Trabalho de Grupo

Ano Lectivo 2004/05

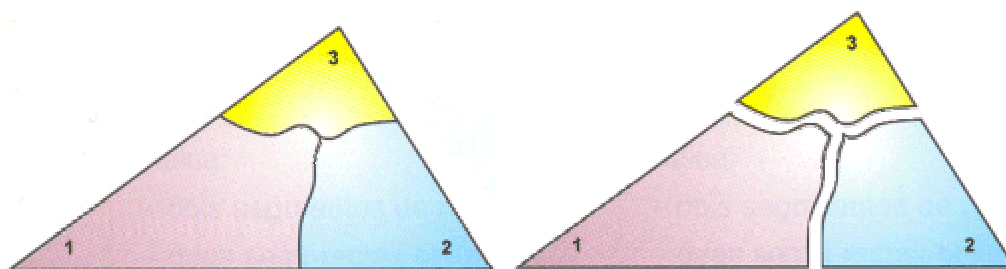
Ângulos internos de um triângulo

7.º Ano

1.ª Parte

Manuseando triângulos

- A. Constrói um qualquer triângulo em cartolina.
(Observa as figuras apresentadas abaixo)
Pinta parte dos seus ângulos internos, junto a cada um dos vértices, e numera-os.
Corta o triângulo em três pedaços, de forma semelhante à apresentada:



Utilizando os três pedaços, tenta fazer um ângulo constituído por 1, 2 e 3.

É possível? Se sim, que ângulo obténs?

Sugestão A

- B. Constrói um qualquer triângulo em papel ou papel de lustro.
Dobra o triângulo que construístes como é indicado na figura seguinte. Isto é, fazendo com que o vértice oposto fique sobre o lado maior do triângulo e que a dobra fique paralela a esse lado.



Agora faz mais duas dobras, perpendiculares à base do triângulo, de forma que os restantes dois vértices fiquem encostados ao primeiro vértice. (Em caso de dúvida, observa na animação os procedimentos a efectuar.)

Animação 1

O que é que verificas? Porque será?
O que aconteceu com os teus colegas dos outros grupos? Dependerá do triângulo considerado?

Sugestão B

O resultado obtido pode também ser conseguido recorrendo a duas transformações geométricas. Uma delas é já tua conhecida. Executa os procedimentos indicados na animação apresentada seguidamente e identifica a transformação geométrica já tua conhecida e descreve a outra.

Executar a tarefa C

2.ª Parte

Um programa de geometria dinâmica: *Cinderella*

C. Agora vais ver como se pode investigar esta mesma propriedade dos triângulos com o programa de geometria dinâmica *Cinderella*.

1. Começa por construir um triângulo [ABC].

- cria três pontos (chama-lhes A, B e C);
- constrói os três lados do triângulo (são os segmentos que unem os pontos dois a dois);
- arrasta um dos vértices do triângulo e verifica que o triângulo muda de forma mas não se desfaz.

2. Pede ao Cinderella que meça as amplitudes dos ângulos internos do triângulo [ABC].

3. Arrasta um vértice qualquer do triângulo e verifica que os valores dos ângulos variam.

Continuas a obter a relação obtida na 1.ª Parte?

Enuncia a propriedade que verificas relativamente aos ângulos internos de um triângulo.

Se já conheces o programa *Cinderella*, podes usá-lo para fazer a construção acima descrita.

Em caso negativo, resolve este exercício:

Exercício C

3.ª Parte

Um pouco de História

D. A propriedade que enunciaste na questão anterior, «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° », é, certamente, já do teu conhecimento e já a aplicaste algumas vezes.

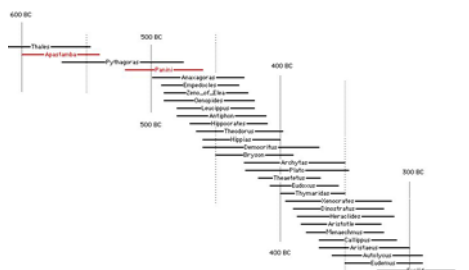
Mas, será verdadeira essa afirmação?

Não poderá acontecer que o resultado obtido nas experiências anteriores seja um valor próximo de 180° , sem ser exactamente 180° ?

Confessa que agora ficaste confuso... Mas, então é ou não é igual a 180° ?

Julga-se que [Tales](#) (624 – 547 a. C.) terá usado o facto de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos. No entanto não há provas que tenha demonstrado essa afirmação.

É considerado certo que os matemáticos da escola de [Pitágoras](#) (cerca de 580 – 500 a. C.) teriam demonstrado o teorema "todo o triângulo tem os ângulos internos iguais a dois ângulos rectos", com base numa axiomática (conjunto de noções admitidas sem demonstração, que formam um ramo cujo conteúdo se deduz pelo raciocínio) considerada rudimentar nos dias de hoje e, na época, considerada insatisfatória por [Aristóteles](#) (384 – 322 a. C.).

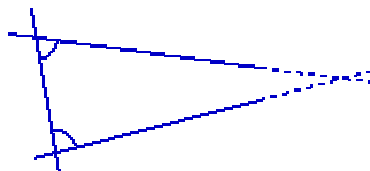


[ver linha do tempo](#)

Cerca do séc. III a. C., após a criação da obra [Os Elementos](#) por [Euclides](#) (cerca de 325 – 265 a. C.), a incapacidade demonstrativa da relação entre os ângulos formados por uma transversal incidindo em duas paralelas, quer a igualdade a dois rectos dos ângulos internos dum triângulo ficou resolvida. Euclides, para validar toda a sua obra de geometria, dita Euclideana, formulou uma afirmação que (por princípio) se aceita como verdadeira para o desenvolvimento dessa teoria geométrica, e que pode ser enunciada da seguinte forma:

Se uma linha recta incidir em duas linhas rectas e fizer os ângulos internos do mesmo lado menores do que dois ângulos rectos, as duas linhas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos rectos.

Nota: Um postulado é uma afirmação cuja veracidade se aceita sem prova.



Explora a animação seguinte, para perceber melhor esta afirmação de Euclides, que é conhecida por o **5.º Postulado de Euclides**.

Animação 2

No século XVIII, o matemático britânico [John Playfair](#) apresentou uma formulação equivalente ao 5.º postulado, mas mais simples do que a frase de Euclides:

Dada uma recta e dado um ponto exterior a ela, existe uma e uma só recta paralela à recta dada e passando pelo ponto dado.

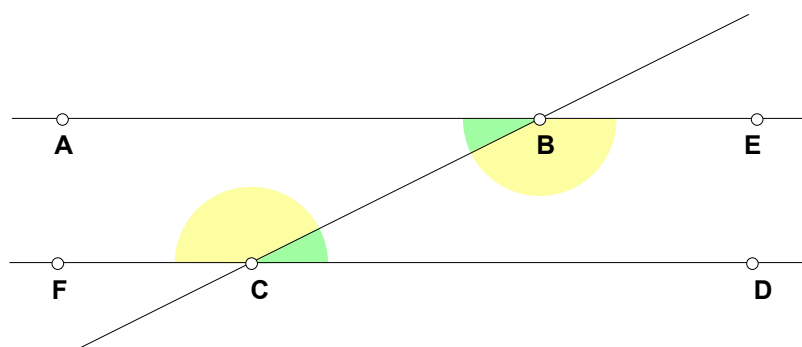
4.ª Parte

A igualdade de ângulos alternos internos

E. Completa a demonstração do seguinte teorema:

Hipótese: As rectas AB e CD são paralelas e a recta BC é uma sua transversal.

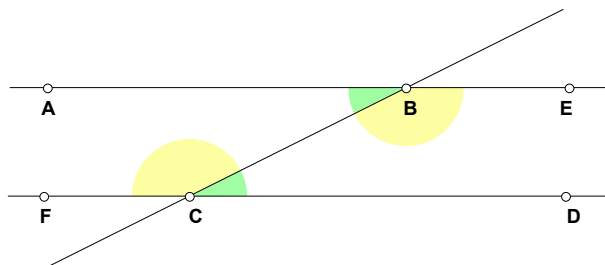
Tese: Os ângulos ABC e BCD são iguais.



Demonstração:

Caso 1: o ângulo $\angle ABC$ é menor que o ângulo $\angle BCD$.

Nesta circunstância, a soma dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCF$ é _____ a dois rectos, pelo que, de acordo com o postulado 5.º, as rectas AB e CD se _____ do lado destes ângulos. O que é absurdo, pois por construção as rectas AB e CD são _____. Logo, não é verdade que o ângulo $\angle ABC$ é _____ que o ângulo $\angle BCD$.



Caso 2: o ângulo $\angle ABC$ é maior que o ângulo $\angle BCD$.

Nesta circunstância, a soma dos ângulos $\angle BCD$ e $\angle CBE$ é _____ a dois rectos, pelo que, de acordo com o postulado 5.º, as rectas AB e CD se _____ do lado destes ângulos. O que também é absurdo, pois por construção as rectas AB e CD são _____. Logo, também não é verdade que o ângulo $\angle ABC$ é _____ que o ângulo $\angle BCD$.

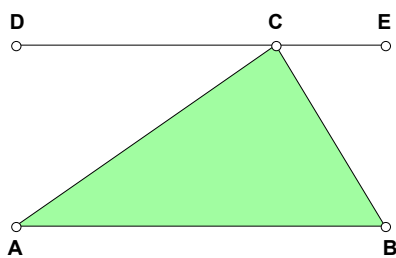
Conclusão: Portanto, não sendo diferentes, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são iguais.

5.ª Parte

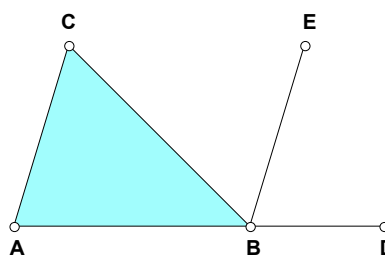
A demonstração

F. Para as duas situações apresentadas a seguir, usando o resultado demonstrado anteriormente, prova que:

Num triângulo, a soma das amplitudes dos seus ângulos internos é 180° .



As rectas AB e DC são paralelas



As rectas AC e BE são paralelas

6.ª Parte

Para evitar surpresas... e alguns extras

G. Para evitar surpresas num futuro próximo, deixo-te aqui uma ligação:

<http://www.geocities.com/thesciencefiles/anglesum/page.html>

Surpreendido?

Se estás curioso e queres saber alguma coisa sobre estas novas geometrias, sugiro-te a leitura seguinte:

Ao longo da história, o 5.º postulado causou alguma estranheza e desconforto. A complexidade da frase, por comparação com a simplicidade das frases que exprimem os 4 primeiros postulados, convenceu alguns géometras de que [o 5.º postulado poderia talvez ser demonstrado](#) (e, portanto, deixaria de ser "postulado" e passaria a ser "proposição"). Esta convicção originou muitas pesquisas que só terminaram no séc. XIX, quando [Lobatschewski](#) e [Bolyai](#) conceberam geometrias que satisfazem os 4 primeiros postulados e não satisfazem o 5.º. Isso veio mostrar que o 5.º postulado não pode ser uma consequência dos outros 4; portanto Euclides tinha razão: trata-se mesmo dum postulado!

Nas geometrias concebidas por Lobatschewski e por Bolyai, o 5.º postulado de Euclides não se verifica; geometrias assim dizem-se "[não-euclidianas](#)".

Carlos Sá
[Pergunte Agora](#)

Os 4 primeiros postulados de Euclides são:

1. Dados dois pontos, pode traçar-se uma recta que passa por ambos;
2. Pode prolongar-se uma linha recta dada;
3. Dados dois pontos, pode traçar-se uma circunferência com centro num deles e que passe pelo outro;
4. Todos os ângulos rectos são iguais.

H. Podes encontrar o enunciado do 5.º Postulado numa edição portuguesa de 1855 dos *Elementos* de Euclides, no seguinte endereço:

<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/2parte.html>

Nesta versão, o 5.º Postulado corresponde ao Axioma XII.

I. A demonstração que efectuámos na 5.ª parte também foi feita por Euclides nos *Elementos*. Podes apreciar essa prova estudando a Prop. XXXII, neste endereço:

<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/4parte.html>

Podes apreciar também essa demonstração na seguinte animação:

Animação 3

Se pretenderes perceber ou conhecer as justificações indicadas entre parêntesis na animação anterior, podes consultá-las em português no endereço seguinte:

http://www.prof2000.pt/users/zemaria/CINDERELLA/Tarefa_5_P32.htm

Nota: A diferença que notas entre a terminologia usada para referenciar as diversas justificações é devido a, em cada um dos casos, se ter usado versões diferentes dos *Elementos* de Euclides.

FIM

