

GEOMETRIAS E SUA HISTÓRIA

1. Geometria e História da Geometria: porquê?

O ensino da geometria tem sofrido muitas vicissitudes nos últimos decénios, tanto a nível elementar como superior, e não apenas em Portugal. O resultado final de tais vicissitudes tem sido, genericamente, a impreparação de docentes e discentes para as coisas da geometria e a criação de um grande espaço vazio ou "terra de ninguém" onde pululam as mais variadas teorias sobre os conteúdos e os métodos mais adequados para colmatar as grandes falhas na formação geométrica que todos ou quase todos, entretanto, reconhecem como graves e a necessitar de reparação urgente.

Independentemente dos conteúdos programáticos dos *Guias* elementares ou superiores, é certo, porém, que uma preparação adequada dos docentes passa por um estudo da(s) geometria(s) que contemple, pelo menos, os seguintes aspectos:

1. um pouco de História da Geometria e da sua relação com outras áreas matemáticas, nomeadamente a Álgebra elementar, desde as origens heurísticas (egípcios e babilónicos), passando pelo desenvolvimento e sistematização durante o período helenístico (axiomática de Euclides) e cobrindo, a traços largos, desenvolvimentos posteriores (o problema das paralelas) até ao descobrimento das geometrias não-euclidianas no século XIX;
2. o estudo, relativamente desenvolvido, de alguma apresentação moderna (axiomática) dos fundamentos da geometria euclidiana e, possivelmente, de elementos de alguma ou algumas geometrias não euclidianas, hiperbólica, esférica, projectiva, ... Em particular, é imprescindível o conhecimento dos resultados básicos sobre o papel do axioma de paralelismo (na versão de Playfair, para a geometria plana: *para toda a recta r e ponto P não em r , existe uma única paralela a r passando por P*), a congruência e a semelhança de triângulos e sobre circunferências e tangentes, ângulos inscritos, áreas e volumes elementares, etc., que são instrumentais nas aplicações e na resolução de inúmeros e variados problemas, bem como um pouco de geometria sólida;

3. o conhecimento funcional de estruturas geométricas concretas como as chamadas (modelos de) geometrias finitas e, muito particularmente, do plano e do espaço euclidianos, sob o ponto de vista analítico (isto é, da geometria analítica em tais espaços);
4. o conhecimento das transformações geométricas e seus grupos, no plano e no espaço euclidianos, suas propriedades, pontos e rectas invariantes e classificação.

Todavia, devemos ter em conta que a maioria dos actuais e futuros docentes de matemática não tiveram *Guias* formativos que cobrissem todos os tópicos anteriores ou, sequer, uma percentagem significativa de tais tópicos, e não é certamente de esperar que os adquiram por excepcional intuição a partir dos fragmentos dispersos que podem consultar nos manuais escolares. Daí a necessidade imperiosa de investir algum esforço na aprendizagem autodidacta através de algumas leituras bem escolhidas.

Este Guia vai um pouco na sensibilização para essas faltas, sobretudo, nesta parte, no sentido de encaminhar o leitor interessado para algumas visitas guiadas a manuais e outros elementos de estudo criteriosamente escolhidos nos quais encontrará, para além das matérias científicas pertinentes, elementos de natureza lúdica, aplicações interessantes, e inúmeros problemas de diferentes graus de dificuldade para utilizar na sala de aula, na certeza de que a Geometria é a seara das mais ricas e gostosas colheitas.

2. Um pouco de história

2.1 Origens da geometria

A geometria tem origem provável na agrimensura ou medição de terrenos, no Egipto antigo, segundo o historiador grego Heródoto (Séc. V a.C.), mas é certo que muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, da Babilónia à China, passando pela civilização Hindu. O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medir).

Em tempos recuados, a geometria era uma ciência empírica, uma colecção de regras práticas para obter resultados aproximados. Os babilónicos, entre 2000 e 1600 a.C., consideravam o valor de π (razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência) como sendo igual a 3, valor este que também se encontra mencionado em

escritos chineses antigos e é utilizado por arquitectos romanos, apesar de alguns povos como os judeus e os egípcios conhecerem aproximações melhores, como $\frac{22}{7}$ e $(\frac{16}{9})^2$.

Os géometras egípcios acertavam, por vezes, no resultado correcto, como no caso do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, outras vezes erravam grosseiramente, como na área de um quadrilátero convexo arbitrário, calculada como se fora um rectângulo [produto das semisomas das medidas dos lados opostos, que corresponde à fórmula $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$]. Os babilónicos eram bastante mais avançados que os egípcios em aritmética e álgebra e conheciam bem o famoso *Teorema de Pitágoras*, cuja primeira demonstração é atribuída aos pitagóricos muitos séculos mais tarde, e o seu recíproco.

Mas é sem dúvida com os géometras gregos, começando com Táles de Mileto (c. 624-547 a.C.), que a geometria é estabelecida como teoria dedutiva. A intuição, a descoberta empírica e a experimentação têm o seu lugar, mas é o raciocínio dedutivo, a demonstração ou dedução a partir de hipóteses conhecidas ou admitidas que estabelece a veracidade das proposições geométricas. O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Táles é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos. Pitágoras (c. 572-497 a.C.), após longas viagens pela Babilónia e Egipto, estabeleceu-se em Crotona, cidade grega no sul da Itália, por volta de 530 a.C., onde fundou um culto religioso e filosófico que cultivava a purificação do espírito através da música e da matemática. São mais conhecidas as descobertas e atribuições da escola pitagórica com os números, nomeadamente, com a descoberta dos incomensuráveis [a diagonal de um quadrado é incomensurável com o lado, o que quer dizer que a razão entre o comprimento da diagonal e o comprimento do lado não é exprimível como uma fracção de inteiros (positivos)] e o conseqüente descalabro da escola pitagórica. O poder (e a magia) dos números são elementos essenciais da crença pitagórica na racionalidade do universo mas, admitindo apenas inteiros (positivos) e suas razões [ou, como se diz modernamente, números racionais (positivos)], tal descoberta pôs em causa os fundamentos filosóficos da escola e determinou o seu encerramento. Como diz o historiador Proclo (410-485): «É sabido que o homem que primeiro tornou pública a teoria dos irracionais pereceu num naufrágio, para que o inexprimível e inimaginável nunca fosse revelado.»

Não existem documentos matemáticos de produção pitagórica, nem é possível saber-se exactamente a quem atribuir a origem das descobertas matemáticas dos pitagóricos na aritmética e na geometria, mas o essencial das suas contribuições

geométricas consta nos *Elementos* de Hipócrates de Quios (o matemático, não o médico homónimo) por volta de 400 a.C., também perdido para a historiografia mas sistematizado nos Livros I a IV dos *Elementos* de Euclides um século mais tarde. A aritmética dos pitagóricos, por seu turno, está contida no livro VII do famoso tratado de Euclides, enquanto o livro V contém uma resolução do problema dos incomensuráveis com uma nova teoria das proporções atribuída a Eudócio de Cnido (c. 408–355). Eudócio é um dos maiores matemáticos da antiguidade, juntamente com Arquimedes, e um dos expoentes da Academia fundada por Platão (c. 429–347 a.C.) em Atenas no ano de 387 a.C.

Na *República*, Platão expõe a sua concepção da matemática como «uma actividade mental mais valiosa do que mil olhos, pois só através dela pode a verdade ser apreendida». Os sentidos só percebem sombras de coisas reais (alegoria da caverna). Para corrigir os erros dos sentidos, somente o pensamento dialéctico, exercitado através do estudo da matemática. Como exemplo pertinente de aplicação do método socrático, precursor do método indirecto (*reductio ad absurdum*) Platão citava a famosa demonstração de incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o lado (que, modernamente, se exprime pela irracionalidade de $\sqrt{2}$).

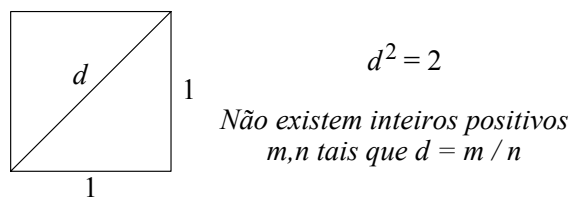


Figura 1

A pertinência deste exemplo consiste na observação de que a referida incomensurabilidade nunca poderia ser descoberta a partir de observações ou medições experimentais, as quais estão sempre sujeitas a um erro maior ou menor. A matemática, portanto, é um produto do puro pensamento discursivo — as suas verdades são estabelecidas pelo raciocínio dedutivo e não pela verificação experimental. Isto não quer dizer, obviamente, que as noções e teorias matemáticas não sejam motivadas por, ou tenham aplicações em coisas práticas, mas apenas que estes aspectos são em algum sentido estranhos aos requisitos e critérios matemáticos intrínsecos. Esta concepção é exemplarmente desenvolvida pelo discípulo da escola platónica, Euclides de Alexandria (c. 323–285 a.C.), no tratado *Elementos*, em treze volumes ou livros publicado por volta de 300 a.C. Euclides baseia-se nos seus predecessores gregos: os pitagóricos, nos livros I–IV, VII e IX, Arquitas no livro VIII, Eudócio nos livros V, VI e XII e Taeteto nos

livros X e XIII. Mas Euclides não se limita a expor as teorias destes mestres. No que respeita à geometria, Euclides organiza as matérias de um modo sistemático a partir de primeiros princípios e definições, procedendo ao desenvolvimento por via dedutiva. Inaugura assim, de maneira brilhante que domina o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado *método axiomático*. Analisaremos com mais pormenor o trabalho de Euclides na secção seguinte. Terminamos esta secção com algumas referências a outros grandes matemáticos do período helenístico.

Arquimedes de Siracusa (c. 287–212) é o segundo grande matemático da chamada primeira escola de Alexandria. Os seus escritos são em regra concisos, mas plenos de originalidade. A sua obra prima é o tratado *Da esfera e do cilindro* contendo, entre outros, o célebre resultado de que a razão entre as áreas da superfície de uma esfera e de um cilindro no qual a esfera está inscrita é igual a $\frac{2}{3}$, e é também igual à razão entre os respectivos volumes. Num importante documento escrito, na forma de uma carta dirigida a Eratóstenes (bibliotecário no Museu de Alexandria) recuperado num antiquário em 1887, publicado em 1906 por Heiberg e conhecido por *O Método*, Arquimedes descreve como descobria os seus resultados. Os argumentos que utilizava — decomposição de superfícies e sólidos em faixas ou fatias infinitesimais e sua colocação judiciosa nos pratos de uma alavanca interfixa, entre outros — são percursos das técnicas sofisticadas do cálculo integral moderno. Num desses argumentos, sendo conhecidos o volume do cone e do cilindro de bases circulares, Arquimedes equilibra uma esfera e um cone circular (com altura e raio da base iguais ao diâmetro da esfera) com quatro cilindros circulares (também com altura igual ao diâmetro da esfera e raio da base igual ao raio da esfera) para deduzir a fórmula do volume da esfera ($V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$).



Figura 2

Todavia, Arquimedes não confia no rigor justificativo dessas técnicas, por isso, ao publicar os seus resultados, fá-los acompanhar de demonstrações no estilo

euclidiano clássico, usualmente pelo método de exaustão e compressão (uma dupla redução ao absurdo).

Um exemplo de uma heurística infinitesimal (utilizada por Kepler no séc. XVII) para descobrir a relação entre a área (A) e o perímetro (P) de um círculo de raio r é a seguinte. Imagine-se um polígono regular inscrito na circunferência do círculo com um número muito grande de lados, e tirem-se raios do centro da circunferência para os vértices, formando um número igual de pequenos triângulos cujas bases são os lados do polígono. Se o número de lados for infinitamente grande¹, cada lado é infinitamente pequeno, o polígono confunde-se com a circunferência e a altura de cada triângulo confunde-se (é infinitamente próxima de) com o raio r da circunferência. Assim, a área de cada triângulo é praticamente igual a

$$\frac{1}{2} \times (base) \times (altura) = \frac{1}{2} \times (base) \times r,$$

a área da região poligonal é a soma das áreas de todos estes triângulos e confunde-se com a área do círculo.

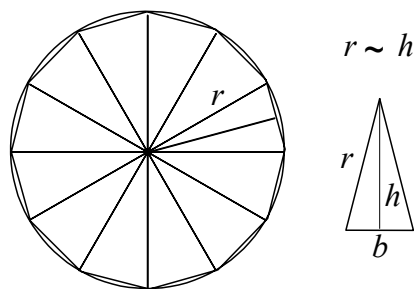


Figura 3

Ora, somando todas as áreas triangulares, a soma das bases dá o perímetro P da circunferência, donde $A = \frac{1}{2} \times P \times r$. O resultado está correcto!

¹ Entidades numéricas infinitamente grandes e pequenas (infinitesimais) foram utilizadas heurísticamente desde a antiguidade, e especialmente durante os séculos XVII e XVIII pelos matemáticos que precederam e pelos que contribuíram para o estabelecimento e desenvolvimento do cálculo infinitesimal modernos, como Newton, Leibniz, Euler, etc. O seu estatuto ontológico foi sempre objecto de dúvida e polémica e, na segunda metade do século XIX, durante a chamada rigorização ou aritmetização da Análise, foram postos de lado a favor da teoria dos limites. Todavia, durante a década de 60 teve lugar a sua reabilitação e justificação rigorosa na chamada *Análise Não-standard* criada pelo matemático e lógico A. Robinson.

O terceiro expoente da primeira escola de Alexandria é Apolónio de Perga (c. 262–190), um quarto de século mais novo do que Arquimedes. Apolónio estudou e permaneceu em Alexandria, tendo sido cognominado "O Grande Geómetra" pelo seu tratado *Cónicas*, a última obra prima da matemática grega em oito volumes, dos quais apenas o último chegou até nós. Num outro trabalho, *Tangências*, discute o seguinte problema, que ficou célebre: dadas três figuras planas, cada uma das quais é um ponto, uma recta ou uma circunferência, determinar as circunferências tangentes às três figuras dadas.

O período áureo da matemática grega declina a partir do terceiro século a.C., particularmente após a morte de Ptolemeu III em 221 a.C. e a agitação política e social que culmina com a destruição parcial do museu/biblioteca de Alexandria. Nos três séculos seguintes são apenas dignos de menção pelas suas contribuições matemáticas Hiparco de Niceia (c. 180–125 a.C.), astrónomo e fundador da trigonometria, por necessidade de ofício, e o geómetra Menelau de Alexandria, já no final do primeiro século da era cristã. No século II desta época são de mencionar o astrónomo Cláudio Ptolemeu, cujas obras *Almageste* e *Geografia* dominam os estudos astronómicos durante muitos séculos. Entre 250 e 350 assiste-se a um ressurgimento dos estudos matemáticos em Alexandria, com Herão, matemático, físico e comentador dos *Elementos*, Diofanto, autor da *Aritmética*, e Papo, outro comentador de Euclides e historiador da geometria. Mencionem-se ainda Teão (c. 364), editor dos *Elementos*, a sua bela e desventurada filha Hipácia (370–415), comentadora dos trabalhos de Apolónio, Ptolemeu e Diofanto, vítima do fanatismo cristão inflamado por Cirilo, patriarca de Alexandria e, finalmente, Proclo (410–485) que estudou em Alexandria mas mudou para Atenas, tornando-se director da Academia. O seu comentário ao livro I dos *Elementos* contém valiosa informação sobre a história da geometria pré-euclidiana. O último director da Academia ateniense foi Damasco que, com o seu discípulo Simplício, conseguiu fugir para Bagdade quando o imperador Justiniano encerrou aquela instituição em 529, alegadamente por motivo do ensino pagão e perverso que aí se ministrava. Esse ano marcou o início da Idade das Trevas.