

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

História resumida do TFA

Chamamos *polinómio complexo* numa indeterminada x a uma expressão da forma

$$(1.1) \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde os *coeficientes* a_i ($0 \leq i \leq n$) são números complexos.¹ Se os coeficientes forem números reais, dizemos que se trata de um *polinómio real*. Se todos os coeficiente forem nulos, o polinómio chama-se o *polinómio zero*, que não possui grau; se $a_n \neq 0$, o polinómio diz-se de *grau* n e a_n é o *coeficiente director*; se $n = 0$ o polinómio diz-se *constante* e nos casos $n > 0$ diz-se *não constante*. Se o coeficiente director for $a_n = 1$ o polinómio diz-se *mónico*. Um polinómio de grau 1 diz-se *linear* ou *binomial*, e um polinómio de grau 2 diz-se *quadrático*. Os polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ dizem-se *iguais* ou *idênticos* sse tiverem o mesmo grau e os mesmos coeficientes. Finalmente, um número complexo c é uma *raíz* (ou *zero*) do polinómio (1.1) sse $P(c) = 0$, isto é, $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$. Também dizemos, neste caso, que c é uma *solução* da equação polinomial $P(x) = 0$.

¹ Quando dizemos que $z = x + yi \in \mathbb{C}$ é um número complexo, não estamos a excluir a possibilidade de a parte imaginária $\Im(z) = y$ ser nula e z se reduzir à sua parte real, isto é, $z = \Re(z) = x$ ser um número real.

O *Teorema Fundamental da Álgebra* (abreviadamente, TFA²) é actualmente conhecido como a proposição de que todo o polinómio complexo não constante, numa indeterminada x , possui, pelo menos, uma raiz complexa. Foi demonstrado (embora ainda com algumas falhas, pelos modernos padrões de rigor, somente colmatadas na totalidade por A. Ostrowski em 1920) por Carl Gauss em 1799 num trabalho que constitui a sua tese de doutoramento, com o título bem descritivo (tradução livre) “Nova demonstração do teorema de que toda a função racional inteira de uma variável pode ser decomposta em factores reais do primeiro ou segundo grau.” Gauss voltou posteriormente a fazer mais três demonstrações deste teorema, a última das quais em 1849. O título do trabalho sugere, por um lado, que existiriam tentativas de demonstração anteriores e, por outro, que a questão essencial era a da decomposição em factores reais (isto é, com coeficientes reais) lineares ou quadráticos (quer dizer, de uma das formas $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$), questão que é, aliás, equivalente à da existência de raízes em $\mathbb{C}$. Naquela época, a Álgebra ainda era entendida como essencialmente a teoria dos polinómios com coeficientes reais ou complexos ou, se quisermos, como a teoria das equações algébricas, sendo o TFA considerado como o teorema fundamental desta teoria. Mas, ao contrário da ênfase que tinha sido posta no passado, não era tanto a obtenção de soluções de equações da forma $P(x) = 0$ como a questão da existência de soluções (em $\mathbb{C}$) que ocupava o centro do interesse de Gauss pois, mesmo para binómios da forma $x^n - a$, com $n \geq 5$, a existência de raízes era considerada uma questão longe de trivial.

A importância maior do TFA para a história dos números complexos (tanto como para a das equações algébricas) é simplesmente o facto de ter sido possível demonstrá-lo, o que abriu o caminho para o reconhecimento e desenvolvimento dos números complexos e da Análise Complexa em toda a sua plenitude.

Mencionemos alguns antecedentes históricos do TFA, começando pelos êxitos dos algebristas italianos seiscentistas na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas gerais, conseguindo exprimir sempre as respectivas raízes por meio de radicais, em função dos coeficientes. Em algumas dessas resoluções (por exemplo, no caso da cúbica, como se explica noutro local nesta brochura), os números “imaginários”

2 Infelizmente, esta sigla também designa o *Teorema Fundamental da Aritmética* (existência e unicidade da decomposição em factores primos) mas, nesta secção, refere-se exclusivamente ao teorema enunciado para os polinómios, com o qual possui, aliás, alguma afinidade.

fizeram uma fugaz e incontornável aparição,³ como que a anunciar para a posteridade que não podiam deixar de ser considerados em certas situações.

A quintica geral resistiu a todas as tentativas de resolução por meio de radicais, mas por boa razão, pois tais expressões para as raízes são, em geral, impossíveis de obter, como veio a demonstrar N. Abel em 1826 (elaborando sobre os extensos trabalhos de Lagrange). Todavia, até à altura em que Gauss se debruçou sobre o assunto, quase todos os matemáticos acreditavam na existência de raízes em alguma “terra de ninguém” (alguma extensão do corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos, como diríamos hoje), e desenvolviam métodos imaginativos para mostrar que tais soluções eram, na realidade, números complexos, mas não existia uma prova geral de que fosse sempre assim.

Peter Roth já afirmara, em 1608, que as equações de grau n têm, quando muito, n raízes. Albert Girard, na sua *L'invention en algèbre*, em 1629, foi o primeiro a afirmar que há sempre n soluções (possivelmente repetidas), mas não o demonstrou. Descartes, na 3ª parte de *La Géométrie*, em 1637, descreve tudo o que se conhecia na época sobre equações, observa que um polinómio $P(x)$ que se anula em c é divisível por $x - c$,⁴ e descreve a famosa “regra dos sinais” para calcular o número máximo de raízes reais positivas e negativas. Leibniz, na *Acta Eruditorum*, de 1702, considera a questão de saber se é sempre possível factorizar um polinómio em factores reais lineares ou quadráticos, mas cede pela negativa, face ao “contra-exemplo”

$$x^4 + a^4 = (x^2 - a^2i)(x^2 + a^2i) = (x + a\sqrt{i})(x - a\sqrt{i})(x + a\sqrt{-i})(x - a\sqrt{-i})$$

O produto de quaisquer dois factores lineares no membro à direita nunca é um polinómio quadrático real, mas não ocorreu a Leibniz que $\sqrt{i}$ e $\sqrt{-i}$ pudessem ser da forma

-
- 3 É claro que a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ também tem soluções complexas (quando o discriminante é negativo), mas os matemáticos podiam dizer (e diziam!) que nesse caso não havia soluções. Até à época de Descartes, pelo menos, também diziam que as soluções negativas não eram soluções “reais”!
- 4 A prova é simples, pela teoria da divisibilidade dos polinómios. Se $P(x)$ se anula em c , isto é, $P(c) = 0$, então, dividindo $P(x)$ por $x - c$ obtemos $P(x) = (x - c)Q(x) + r$, onde $Q(x)$ é o polinómio quociente e r o resto, que tem de ser uma constante pois tem de ter grau inferior ao do divisor $x - c$. Substituindo x por c vem $0 = 0 + r$, logo $r = 0$ e, portanto, $P(x)$ é divisível por $x - c$. Reciprocamente, se $P(x) = (x - c)Q(x)$ para algum $Q(x)$, é imediato concluir que $P(c) = 0$.

$a + bi$; de facto, $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ e $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, donde resulta que o produto do 1º e 3º factores, bem como o produto do 2º e do 4º, são quadráticos reais, obtendo-se a factorização

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)$$

Também lhe escapou que isto resultaria muito facilmente da identidade

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2a^2x^2.$$

Este exemplo serve para ilustrar um ponto histórico importante. De facto, as hesitações de Leibniz não são de espantar, pois somente no século XVIII, antes de Gauss se debruçar sobre o assunto, a questão que ocupava os algebristas não era tanto a de saber se as equações algébricas possuíam sempre solução, mas sim a de saber que forma elas tinham, e não era de todo claro que pudessem ser sempre expressas na forma $a + b\sqrt{-1}$ com a, b reais (a notação $i = \sqrt{-1}$ foi introduzida por Euler em 1777). Pelo contrário, acreditava-se que pudesse haver uma hierarquia de “quantidades imaginárias”, de que as da forma $a + b\sqrt{-1}$ seriam as mais simples.

Euler, em carta a N. Bernoulli de 1742 enuncia o teorema de factorização na forma que Leibniz formulara hipoteticamente. Na resposta, Bernoulli aponta um presumível contra-exemplo, o do polinómio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$, cujas raízes são

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}}, x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2 - i\sqrt{3}},$$

mas Euler desfaz a dúvida mostrando que os produtos $(x - x_1)(x - x_3)$, $(x - x_2)(x - x_4)$ são quadráticos reais, iguais a $x^2 - (2 + a)x + 1 + \sqrt{7} + a$ e $x^2 - (2 - a)x + 1 + \sqrt{7} - a$, respectivamente, onde $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}$, e quatro anos mais tarde tenta uma demonstração rigorosa para os polinómios reais (coeficientes reais) de grau menor ou igual a 6, todavia com algumas falhas e passos omissos. Entretanto, já tinha descoberto e anunciado ao seu amigo Goldbach⁵ o facto conhecido

5 Cristian Golbach (1690-1764) é mais conhecido como autor de uma famosa *conjectura* com o seu nome, a de que todo o número natural par $n \geq 4$ é igual a uma soma $n = p + q$ com p e q primos (possivelmente iguais). Teremos de esperar pelo próximo milénio, pelo menos, por uma demonstração ou refutação...

de que as raízes complexas são sempre aos pares (complexos conjugados $a \pm bi$) e que tais pares dão sempre factores quadráticos reais, como é fácil de verificar. Golbach responde cepticamente, mencionado um presumível contra-exemplo, o do polinómio $x^4 + 72x^2 - 20$, mas Euler é lesto a factorizá-lo (as raízes são $\pm \sqrt{-36 \pm 2\sqrt{329}}$, procure o leitor a factorização).

Atribui-se a D'Alembert a primeira tentativa séria, em 1746, de demonstração do teorema de factorização na forma geral (razão pela qual o TFA também é conhecido por *Teorema de Gauss-D'Alembert*) por um processo de minimização de $|P(x)|$, que consiste em escolher convenientemente um $x = x_1$, depois um $x = x_2$ tal que $|P(x_2)| < |P(x_1)|$, depois um $x = x_3$ tal que $|P(x_3)| < |P(x_2)|$ e assim sucessivamente até que, no limite, se obtém um x tal que $|P(x)| = 0$.

Na primeira parte da sua tese de 1779, Gauss critica e aponta as deficiências das “demonstrações” propostas por Euler e por D'Alembert (bem como as de outros matemáticos), mas reconhece o valor da ideia principal da argumentação de D'Alembert e exprime a sua convicção de que ela pode ser elaborada de modo a produzir uma demonstração rigorosa. É exactamente isso que Argand consegue fazer em 1814. Também Lagrange em 1772 e Laplace em 1795 tentam demonstrar o teorema, o primeiro através de uma melhoria das ideias de Euler (mas apelando a raízes “fictícias”) e o segundo por um processo inteiramente novo, de natureza mais “algébrica”.

Como se vê pelo que precede, não foram poucas as tentativas de demonstração do TFA, por métodos bastante diversos, umas mal, outras (mais modernas) bem sucedidas, umas topológicas, outras algébricas, e algumas mais recentes utilizando a Análise Complexa (funções holomorfas) e outras ideias ainda. A mais simples de todas talvez seja a de Argand em 1814, utilizando todavia o facto verdadeiro mas ainda não justificado, naquela época, de que uma função real definida e contínua num conjunto D limitado e fechado do plano tem um valor máximo e um valor mínimo (conhecido posteriormente por *Teorema de Weierstrass* no plano, real ou complexo). Daremos adiante uma versão desta demonstração. Em todas as demonstrações conhecidas até ao presente (e são cerca de uma vintena) há, todavia, um elemento comum, que é o facto de todas elas utilizarem algum método ou conceito essencialmente analítico, no sentido de não algébrico, embora o enunciado do TFA (sob qualquer das formas

possíveis — existência de raiz complexa, ou decomposição em factores reais lineares ou quadráticos) pareça ser de natureza inteiramente algébrica.

Foi Gauss, como já se disse, o principal responsável pela mudança de atitude dos matemáticos face aos números complexos, removendo a auréola de mistério e misticismo de que estavam revestidos até então, de que ainda permanecem alguns vestígios na terminologia utilizada. Só com Gauss é que fica inteiramente claro que os métodos algebrico-analíticos de resolução das equações polinomiais $P(x) = 0$ nunca nos levam para fora do corpo dos números complexos (que são, todos, da forma $a + bi$ com a, b reais). Além disso, também é com Gauss que a mera questão do “cálculo” das raízes⁶ dá lugar à questão da prova de existência de raízes como questão preliminar e fundamental para qualquer busca subsequente.

.....

Bibliografia

D. M. BURTON — *The History of Mathematics, Na Introduction*, Third edition, McGraw-Hill, 1997.

B. FINE, G. ROSENBERGER — *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag, 1997.

6 Questão bem diversa, já referida anteriormente, é a de exprimir as raízes por meio de radicais.