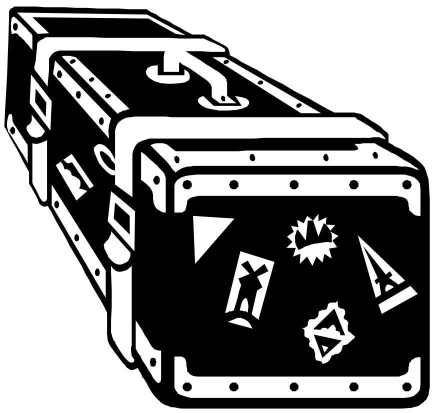
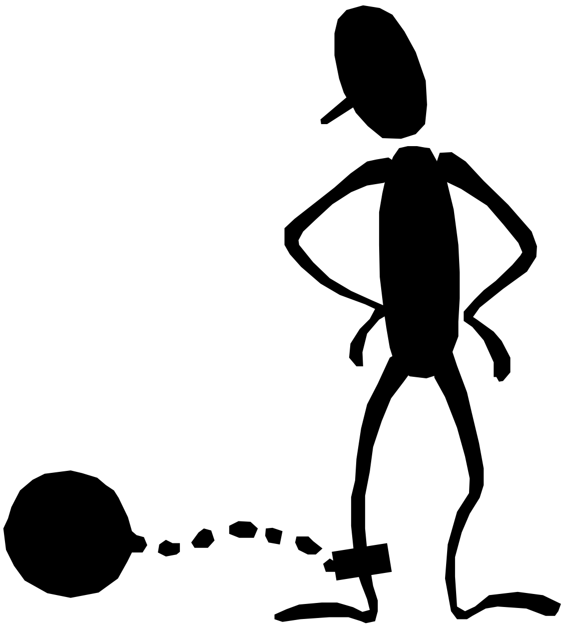
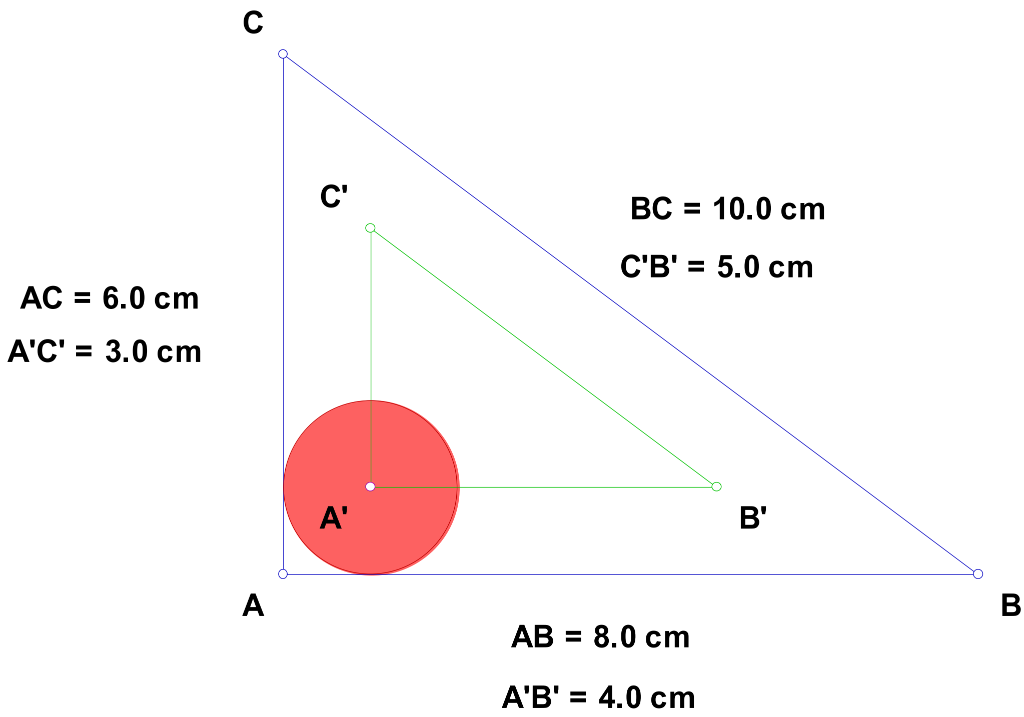
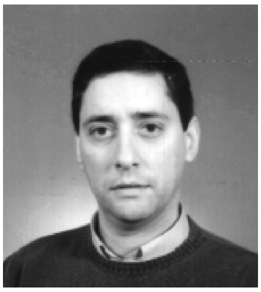
A esfera na caixa







António Manuel Marques do Amaral
LAMEGO
1999



António Manuel Marques do Amaral
Urbanização da Ortigosa, Bloco 11 - 2.º Esq.
5100 LAMEGO
e-mail: mop16940@mail.telepac.pt
Sócio da APM n.º 2218

José Paulo Viana,

Também desta vez o *Sketchpad* «resolveu» o problema.

Depois fez-se uma prova da solução obtida e, por último, tentou-se uma generalização da situação proposta.

Antes de ir de férias, aqui vai a minha participação.

Com os melhores cumprimentos e votos de boas férias,

António Amaral

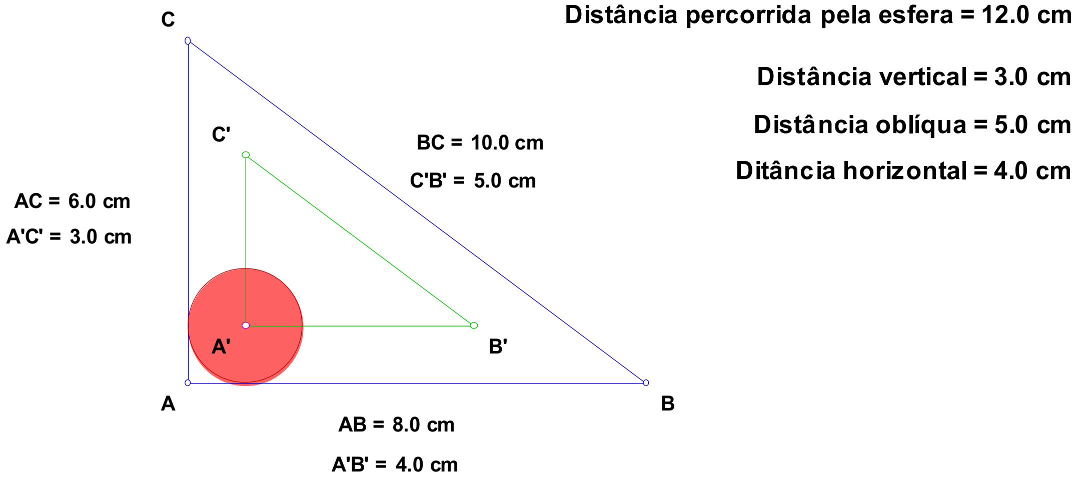
Conteúdo do ficheiro ZIP

ESFERA.DOC	Ficheiro do Word 97 com o presente documento
ESFERA1.GSP	*Sketch* do Geometer's Sktechpad
ESFERA2.GSP	*Sketch* do Geometer's Sktechpad
ESFERA3.GSP	*Sketch* do Geometer's Sktechpad
ESFERA.DRAW	Ficheiro do Designer 3.1 com o referencial

O *Sketchpad*

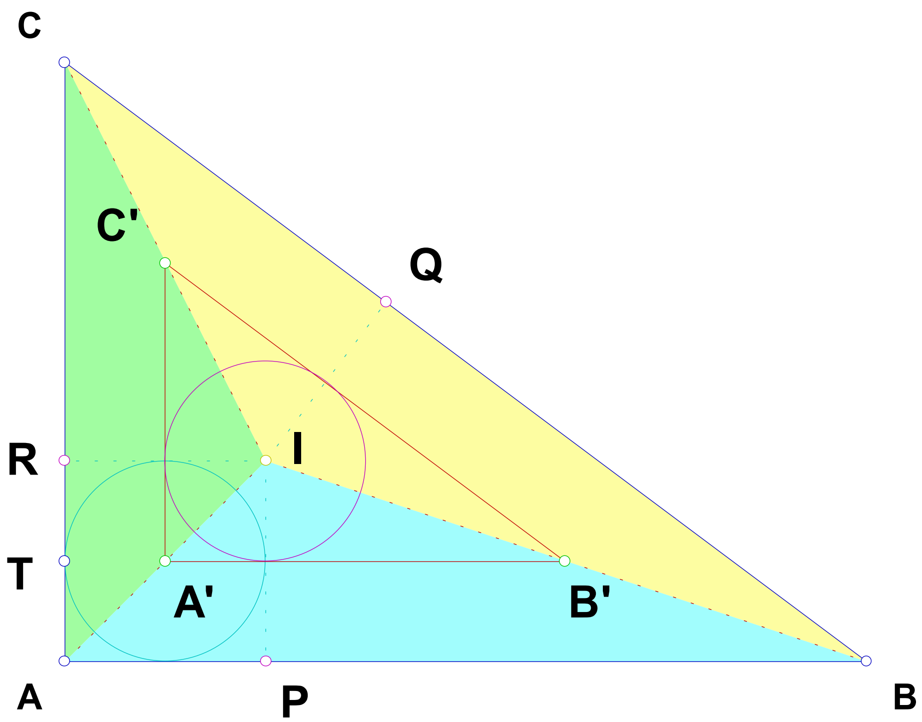
É evidente que a distância percorrida pela esfera após dar uma volta completa à caixa é igual à distância percorrida pelo seu centro.

Também desta vez o *Sktechpad* dá uma resposta directa (ver animação no *sketch Esfera1.gsp*).



Alguma (muito pouca) geometria

Os triângulos [A'B'C'] e [ABC] são semelhantes, de razão de semelhança $r_s = \frac{\overline{A'I}}{\overline{AI}} = \frac{R}{R+r}$, designando *R* e *r*, respectivamente, os raios das circunferências de centros em *I* e em *A'*.



Por outro lado, decompondo o triângulo [ABC] nos triângulos [AIB], [BIC] e [CIA] (amarelo, verde e azul), temos:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}}{2} \times (R+r) + \frac{\overline{BC}}{2} \times (R+r) + \frac{\overline{CA}}{2} \times (R+r) = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2} \times (R+r)$$

No caso presente, sendo $r = 1$, $\overline{AB} = 8$, $\overline{CA} = 6$ e $\overline{BC} = 10$, temos

$$24 = \frac{8+10+6}{2} \times (R+1) \Leftrightarrow R = 1.$$

Assim, a razão de semelhança é $r_S = \frac{1}{2}$, pelo que $\overline{A'B'} = 4$, $\overline{B'C'} = 5$ e $\overline{C'A'} = 3$.

Alguma geometria analítica

O incentro dos triângulos é o ponto de intersecção das rectas *r* e *s*.

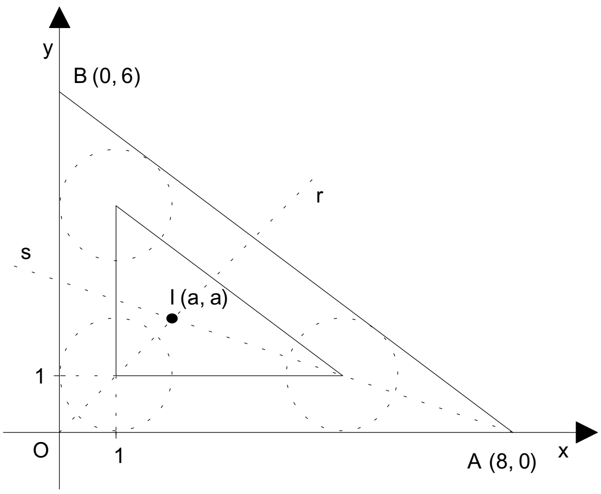
Como um vector director da recta *s* é

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = (-8, 6) + (-10, 0) = (-18, 6),$$

então $y = -\frac{1}{3}(x-8)$ é uma equação de *s*.

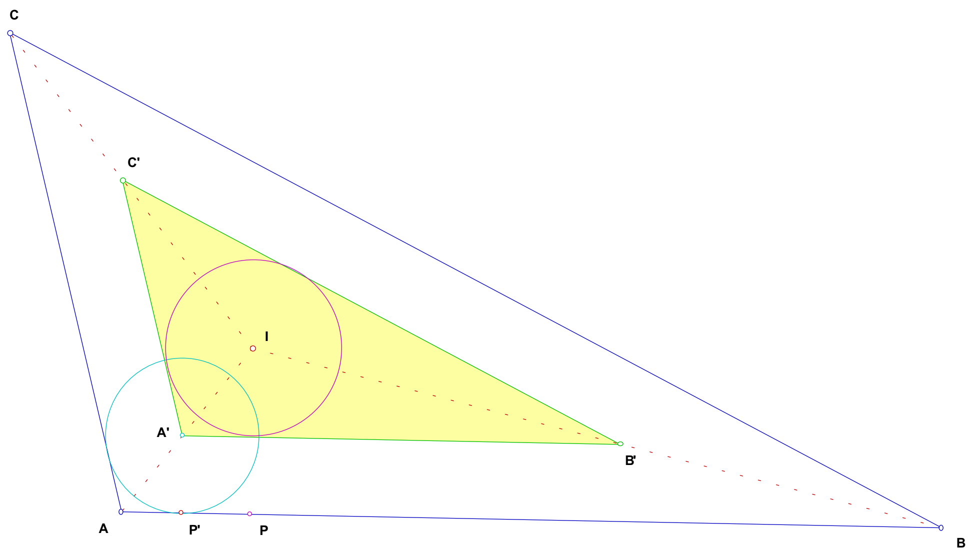
Assim, *I* (2, 2), pois $x = -\frac{1}{3}(x-8) \Leftrightarrow x = 2$.

Considerando agora a semelhança de triângulos acima referida, conclui-se que a razão de semelhança é $r_S = \frac{1}{2}$, pelo que a distância que a esfera percorre numa volta completa é metade do perímetro da base da caixa.



A generalização

A situação apresentada é relativa a um triângulo rectângulo, mas o estudo feito é generalizável para qualquer tipo de triângulo.

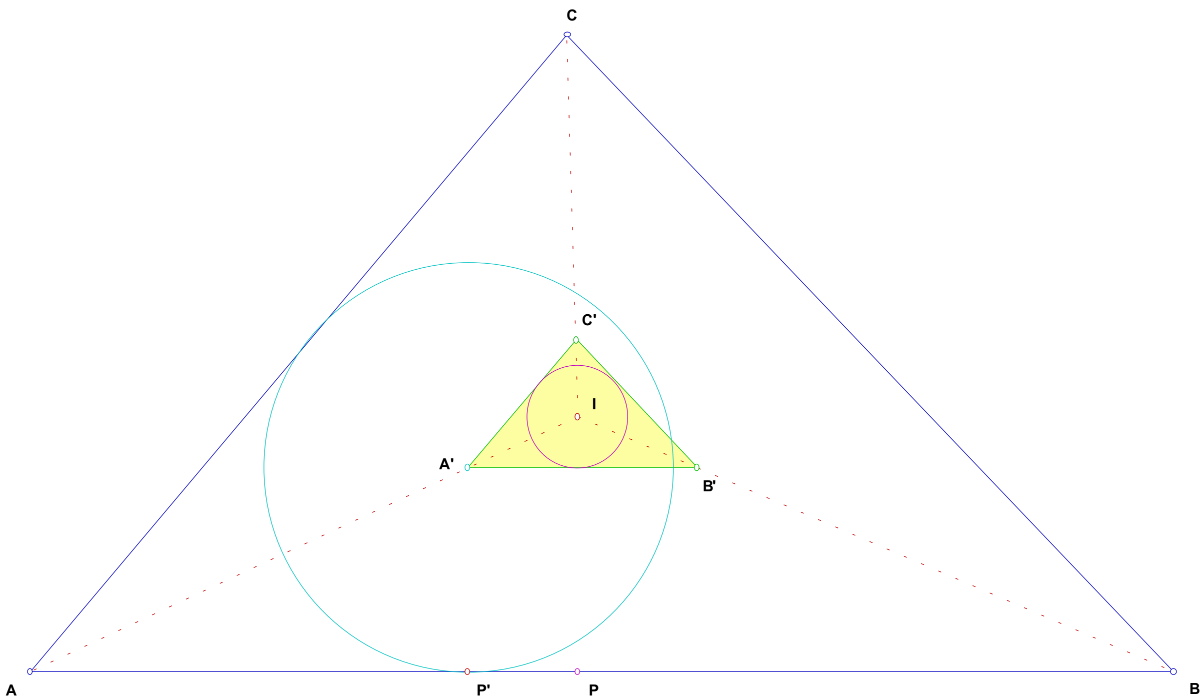


Procedendo de forma análoga ao que foi feito na primeira dedução e utilizando a fórmula de Herão, podemos mostrar que a distância percorrida pela esfera (desde que caiba na caixa ($0 < r_s \leq 1$[(1)])) é dada por:

$$D = \frac{2s \times (\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} - r \times s)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = 2s - \frac{2s^2 r}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = P - \frac{P^2 r}{2A} = P \times \frac{2A - \mathrm{Pr}}{2A}$$

representando s o semiperímetro do triângulo dado, a, b e c as medidas dos seus lados, P o seu perímetro, A a sua área e r o raio da esfera.

A generalização pode ser explorada no *sketch Esfera3.gsp*.



As duas primeiras expressões acima permitem obter a solução do problema apresentado apenas por substituição dos dados fornecidos. Com efeito, no caso em questão, temos

$$D = \frac{24 \times (\sqrt{12.(12-8)(12-10)(12-6)} - 1 \times 12)}{\sqrt{12.(12-8)(12-10)(12-6)}} = 24 - \frac{2 \times 12^2 \times 1}{\sqrt{12.(12-8)(12-10)(12-6)}} = 12$$

A resposta

Após dar uma volta completa sempre encostada às paredes da caixa, a esfera percorre uma distância de 12 cm.

Um abraço e boas férias!

---

(1) Quando a esfera couber à justa na caixa o seu raio é igual ao raio da circunferência inscrita na sua base, cujo valor é $r_b = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{2A}{P}$.