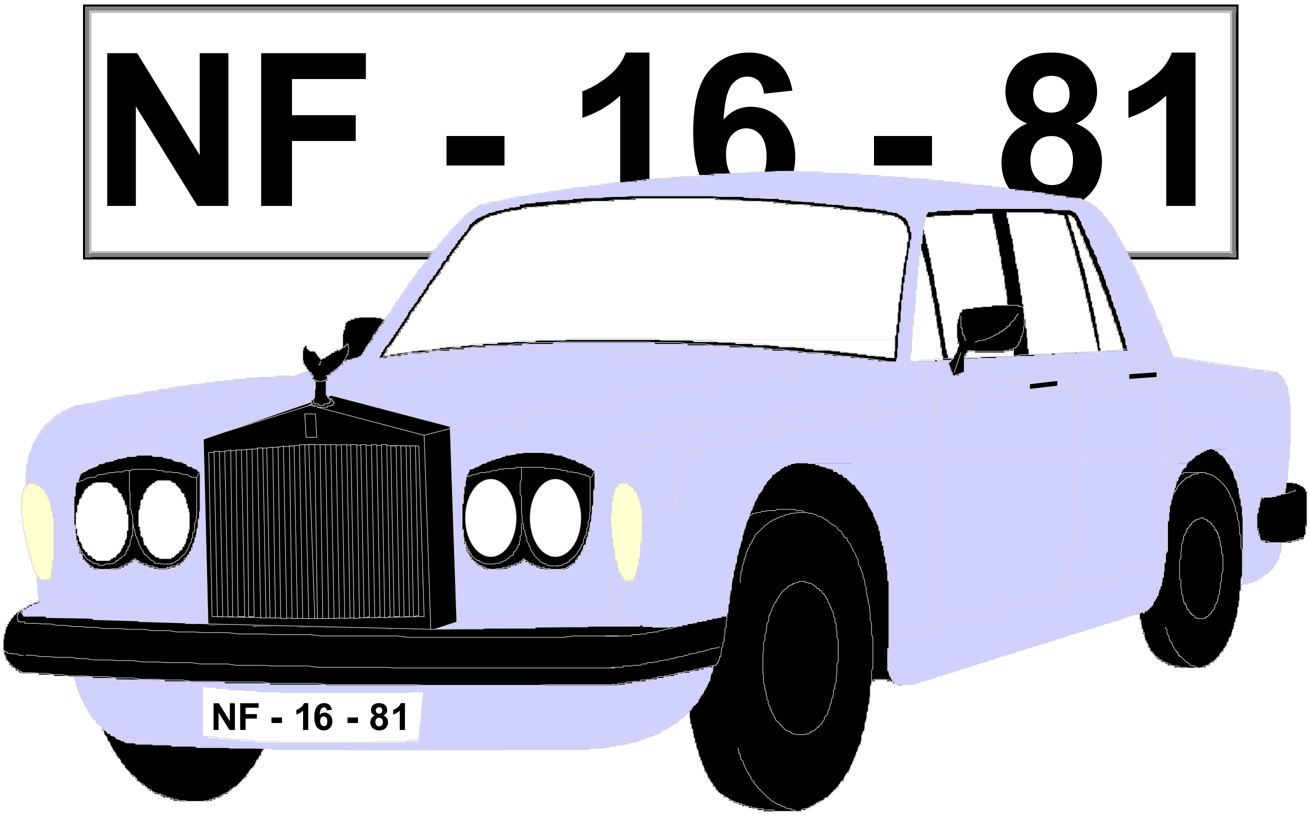
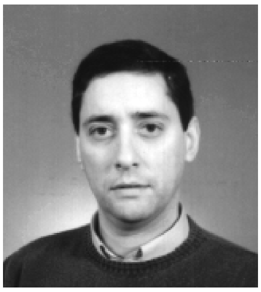
Uma matrícula

quad
rada



António Manuel Marques do Amaral
LAMEGO
1998



António Manuel Marques do Amaral

Urbanização da Ortigosa, Bloco 11 - 2.º Esq.

5100 LAMEGO

e-mail: mop16940@mail.telepac.pt

Sócio da APM n.º 2218

José Paulo Viana,

Desta vez tentou-se dar um pouco a palavra ao cálculo automático.

Com os melhores cumprimentos e votos de Feliz Natal e um bom Ano Novo,

António Amaral

Conteúdo do ficheiro ZIP

MATRICLA.DOC	Ficheiro do Word 97 com o presente documento
MATRICLA.BAS	Ficheiro do Qbasic com o programa
MTRC.TXT	Ficheiro com os resultados do programa
MATRICLA.MTH	Ficheiro do Derive for Windows com alguns cálculos
MATRICLA.XLS	Ficheiro de uma folha de cálculo do Excel

A primeira resolução

Os números

Como o primeiro e o segundo números da matrícula não começam por zero, então os seus geradores apenas poderão ser 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Assim, os números da matrícula apenas poderão ser escolhidos entre 16, 25, 36, 49, 64 e 81.

G2	G1	N2	N1
4	4	16	16
5	5	25	25
6	6	36	36
7	7	49	49
8	8	64	64
9	9	81	81

Estes seis casos originam, por justaposição, 36 possibilidades distintas para o terceiro número, que terá de ser também um quadrado perfeito.

Analisadas as 36 possibilidades conclui-se haver apenas uma solução, conforme se verifica nas tabelas seguintes.

N2N1	*Quadrado perfeito?*
1616	
1625	
1636	NÃO
1649	
1664	
1681	SIM, quadrado de 41

N2N1	*Quadrado perfeito?*
2516	
2525	
2536	NÃO
2549	
2564	
2581	

N2N1	*Quadrado perfeito?*
3616	
3625	
3636	NÃO
3649	
3664	
3681	

N2N1	*Quadrado perfeito?*
4916	
4925	
4936	NÃO
4949	
4964	
4981	

N2N1	*Quadrado perfeito?*
6416	
6425	
6436	NÃO
6449	
6464	
6481	

N2N1	*Quadrado perfeito?*
8116	
8125	
8136	NÃO
8149	
8164	
8181	

Para evitar testar todos os números poderíamos ter procedido assim:

- $16N1 = (40+n)^2 = 1600 + 80n + n^2$, que apenas apresenta solução para $n = 1$, originando 1681.
- $25N1 = (50+n)^2 = 2500 + 100n + n^2$, que não tem solução.
- $36N1 = (60+n)^2 = 3600 + 120n + n^2$, que não tem solução.
- $49N1 = (70+n)^2 = 4900 + 140n + n^2$, que não tem solução.
- $64N1 = (80+n)^2 = 6400 + 160n + n^2$, que não tem solução.
- $81N1 = (90+n)^2 = 8100 + 180n + n^2$, que não tem solução.

Portanto, a matrícula é da forma:

?? - 16 - 81

As letras

Vamos considerar um alfabeto de 26 letras, onde as letras K, Y e W têm, respectivamente, os números de ordem 11, 24 e 25 (Mais vale prevenir que remediar! O seu carro é velho, mas como previu a letra K eu previno-me com as outras duas, pois os políticos são capazes de tudo...)

O maior "*número gerado pela matrícula*" e que satisfaz a condição da parte numérica é 26-26-16-81. Representemos esse número por _ _ _ _1681.

Assim, sendo

$$\_\ \_\ \_\ \_1681 = (M+41)^2 = M^2 + 82M + 1681$$

temos

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = M^2 + 82M = M \times (M+82)\ .$$

Fazendo $M = A \times 10^3 + B \times 10^2 + C \times 10 + D$, com $A, B, C, D = 0, 1, 2, .., 9$, obtemos:

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = M \times (M+82) = (A \times 10^3 + B \times 10^2 + C \times 10 + D) \times (A \times 10^3 + B \times 10^2 + (C+8) \times 10 + (D+2))$$

Determinação de A, B, C e D

NOTA: Não vamos aqui entrar com qualquer restrição como, por exemplo, $A \le 5$.

Como o produto termina em zero, então $D \times (D+2) = \_0$, logo $D = 0$ ou $D = 8$

$D = 0$ **? Não!**

Para $D = 0$, pedindo uma ajuda ao *Derive*, obtemos:

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = 1000000A^2 + 20000AC + 200000AB + 82000A + 100C^2 + 2000BC + 820C + 10000B^2 + 8200B$$

Como o algarismo das dezenas no produto também é zero, então $C = 5$ ou $C = 0$.

Fazendo $D = 0$ e $C = 0$, vem

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = 1000000A^2 + 200000AB + 82000A + 10000B^2 + 8200B$$

Como também o algarismo das centenas no produto é zero, então $2B = \_0$. Logo, $B = 0$ ou $B = 5$.

Fazendo $D = 0$, $C = 0$ e $B = 0$, vem

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = 1000000A^2 + 82000A$$

Como também o algarismo das unidades de milhar no produto é zero, então $2A = \_0$. Logo, $A = 0$ ou $A = 5$.

Fazendo agora $D = 0$, $C = 0$, $B = 0$ e $A = 0$, vem

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = 0$$

O número 00001681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 00 não ser número de ordem das letras do alfabeto considerado.

Fazendo agora $D = 0$, $C = 0$, $B = 0$ e $A = 5$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\ \_\ \_\ \_0000 = 2541000$$

O número 25411681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 41 ultrapassar o número de ordem máximo (26) das letras do alfabeto considerado.

Fazendo $D = 0$, $C = 0$ e $B = 5$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 1082000A + 291000$$

Como também o algarismo das unidades de milhar no produto é zero, então $2A + 1 = \_0$, o que é manifestamente impossível. Vejamos, então, se serve a outra possibilidade.

Fazendo $D = 0$ e $C = 5$, com a ajuda do *Derive*, temos agora

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 200000AB + 182000A + 10000B^2 + 18200B + 6600$$

Como também o algarismo das centenas no produto é zero, então $2B + 6 = \_0$. Logo, $B = 2$ ou $B = 7$.

Fazendo $D = 0$, $C = 5$ e $B = 2$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 582000A + 83000$$

Como também o algarismo das unidades de milhar no produto é zero, então $2A + 3 = \_0$, o que é manifestamente impossível. Vejamos, então, se serve a outra possibilidade.

Fazendo $D = 0$, $C = 5$ e $B = 7$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 1582000A + 624000$$

Repetindo, será $2A + 4 = \_0$. Logo, $A = 3$ ou $A = 8$.

Fazendo $D = 0$, $C = 5$, $B = 7$ e $A = 3$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 14370000$$

O número 14371681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 37 ultrapassar o número de ordem máximo (26) das letras do alfabeto considerado.

Fazendo agora $D = 0$, $C = 5$, $B = 7$ e $A = 8$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 77280000$$

Também o número 77281681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 77 e 28 ultrapassarem ambos o número de ordem máximo (26) das letras do alfabeto considerado.

$D = 8$ **? Sim!**

Para $D = 8$, pedindo uma ajuda ao *Derive*, obtemos:

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 200000AB + 20000AC + 98000A + 10000B^2 + 2000BC + 9800B + 100C^2 + 980C + 720$$

Como o algarismo das dezenas no produto é zero, então $8C + 2 = \_0$. Logo, $C = 1$ ou $C = 6$.

Fazendo $D = 8$ e $C = 1$, com a ajuda do *Derive*, temos agora

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 200000AB + 118000A + 10000B^2 + 11800B + 1800$$

Como também o algarismo das centenas no produto é zero, então $8B + 8 = \_0$. Logo, $B = 4$ ou $B = 9$.

Fazendo $D = 8$, $C = 1$ e $B = 4$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 918000A + 209000$$

Como também o algarismo das unidades de milhar no produto é zero, então $8A+9=\_0$, o que é manifestamente impossível. Vejamos, então, se serve a outra possibilidade.

Fazendo $D=8$, $C=1$ e $B=9$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 1918000A + 918000$$

Repetindo, será $8A+8=\_0$. Logo, $A=4$ ou $A=9$.

Fazendo $D=8$, $C=1$, $B=9$ e $A=4$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 24590000$$

O número 24591681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 59 ultrapassar o número de ordem máximo (26) das letras do alfabeto considerado.

Fazendo $D=8$, $C=1$, $B=9$ e $A=9$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 99180000$$

Também o número 99181681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 99 ultrapassar o número de ordem máximo (26) das letras do alfabeto considerado.

Fazendo $D=8$ e $C=6$, com a ajuda do *Derive*, temos agora

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 200000AB + 218000A + 10000B^2 + 21800B + 10200$$

Como também o algarismo das centenas no produto é zero, então $8B+2=\_0$. Logo, $B=1$ ou $B=6$.

Fazendo $D=8$, $C=6$ e $B=6$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 1418000A + 501000$$

Como também o algarismo das unidades de milhar no produto é zero, então $8A+1=\_0$, o que é manifestamente impossível. Vejamos, então, se serve a outra possibilidade.

Fazendo $D=8$, $C=6$ e $B=1$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1000000A^2 + 418000A + 42000$$

Repetindo, será $8A+2=\_0$. Logo, $A=1$ ou $A=6$.

Fazendo $D=8$, $C=6$, $B=1$ e $A=6$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 38550000$$

O número 38551681, apesar de ser quadrado perfeito, não é solução do problema, pois não poderia ser gerado pela matrícula, visto 77 e 28 ultrapassarem ambos o número de ordem máximo (26) das letras do alfabeto considerado.

Fazendo $D=8$, $C=6$, $B=1$ e $A=1$, com a ajuda do *Derive*, vem

$$\_\,\_\,\_\,\_0000 = 1460000$$

O número 1461681 é um quadrado perfeito e é o único que resta com possibilidade de ter sido o "*número gerado pela matrícula*".

Nenhum dos números anteriores começa por 0

No enunciado fala-se de quatro números. Nos três primeiros é fácil a interpretação do condicionalismo imposto e já foi tido em consideração.

O quarto número resulta da justaposição, à esquerda do terceiro número referido, dos números de ordem das letras, pela ordem que aparecem. Suponho que, ao dizer-se que também o quarto número não começa por zero, a intenção é informar que a letra da esquerda tem ordem superior a 9 e permitir liberdade total para a ordem da letra da direita.

Na resolução apresentada, quer no exemplo fornecido, a determinação das letras pode resultar sem ter em conta o condicionalismo imposto, pois uma das alternativas seria de excluir em virtude de ser ultrapassada a ordem da letra Z (26).

A matrícula

Pelo que foi dito, a letra da esquerda tem ordem 14 e a letra da direita tem ordem 6.

Portanto, a matrícula extremamente curiosa do seu velho carro (certamente também de linhas "quadradas") é a seguinte:

NF - 16 - 81

A segunda resolução

Descobrir os dois números da matrícula é uma tarefa relativamente rápida e simples.

A parte trabalhosa e demorada do problema consiste na determinação das letras da matrícula. Vamos deixar essa parte para a *tecnologia* que temos à mão...

Como vimos, um majorante do "*número gerado pela matrícula*" é 26261681, cuja raiz quadrada é pouco mais que 5124. Por outro lado, o "*número gerado pela matrícula*" tem de ser superior a 1681, que é o quadrado de 41.

Porque o desperdício de recursos é mínimo e o ganho em tempo é grande, vamos procurar os números quadrados perfeitos entre 1681 e 26265625 que sejam da forma _ _ _ _1681.

O programa em QBasic

```
CLS
INPUT "Digite o Nome do Arquivo: "; n$
OPEN n$ FOR OUTPUT AS #1
PRINT #1, "Hora inicio: ", TIME$
PRINT
DIM P AS LONG
FOR n = 41 TO 5125
P = n ^ 2
IF ((P - INT(P / 10000) * 10000) - 1681) = 0 THEN PRINT #1, "n="; n, "n^2="; P
IF ((P - INT(P / 10000) * 10000) - 1681) = 0 THEN PRINT "n="; n, "n^2="; P
NEXT n
PRINT
PRINT #1, "Hora final: ", TIME$
CLOSE
END
```

Os resultados

```
Hora inicio:  22:49:20
n= 41         n^2= 1681
n= 1209       n^2= 1461681
n= 3791       n^2= 14371681
n= 4959       n^2= 24591681
n= 5041       n^2= 25411681
Hora final:   22:49:22
```

A solução

Dos cinco números que têm a terminação 1681, apenas 1461681 satisfaz as condições relativas às letras da matrícula.

A matrícula

Pelo que já vimos antes, a letra da esquerda tem ordem 14 e a letra da direita tem ordem 6.

Assim, a matrícula extremamente curiosa do seu velho carro (o qual estou certo que também é de linhas "quadradas") *continua* a ser a seguinte:

NF - 16 - 81

Variantes ao QBasic

A título meramente comparativo apresentam-se seguidamente programas equivalentes para as calculadoras CASIO FX-602P (que tem 19 anos) e CASIO CFX-9950G.

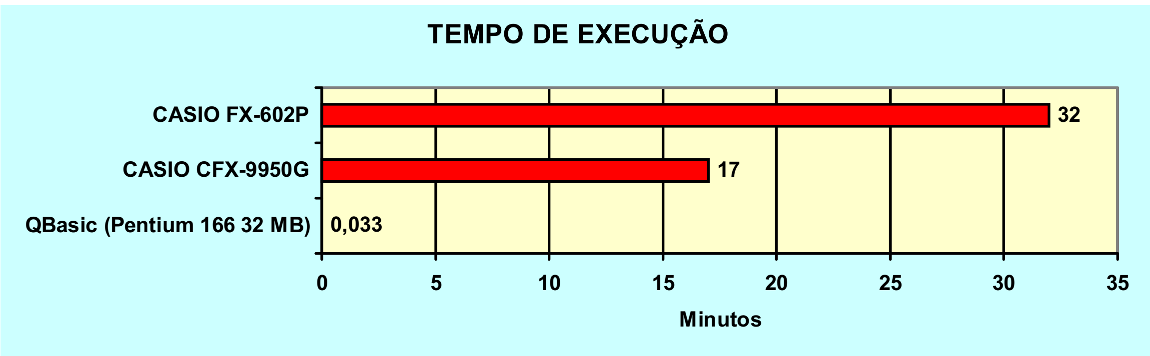
CASIO FX-602P

```
      "N1?" HLT Min00 "N"?" HLT Min01 GOTO1
LBL0  1 M+00
LBL1  MR00 x^2 = Min02 ÷ 10000 = INT Min03 MR02 - MR03 × 10000 - 1681 = x=0 GOTO2
      GOTO4
LBL2  "N=AR00" HLT "N2=AR02" HLT
LBL4  MR01 - MR00 = x=0 GOTO3 GOTO0
LBL3  "FIM"
```

CASIO CFX-9950G

```
For 41→A To 5125↲
If (A^2 - Int (A^2 ÷ 10000) × 10000 - 1681) = 0↲
Then "N=":A◢
"N^2=":A^2◢
IfEnd↲
Next↲
"FIM"◢
Stop
```

Foram obtidos os mesmos resultados... mas, como é natural, os tempos aproximados de execução foram *ligeiramente* diferentes:



Uma variante na primeira resolução

A parte literal da matrícula pode também ser descoberta recorrendo a uma folha de cálculo, seguindo a estratégia anteriormente utilizada, isto é, determinando os valores de **A**, **B**, **C** e **D** segundo os mesmos critérios.

A seguinte secção de folha de cálculo apresenta a situação que origina a descoberta dos valores dessas letras.

				A	**B**	**C**	**D**	
			CM	***UM***	***C***	***D***	***U***	
				1	**1**	**6**	**8**	***Actualizar os valores de A, B, C e D apenas nesta linha***
				1	1	14	10	
				10	10	60	80	
			14	14	84	112		
		1	1	6	8			
	1	1	6	8				
0	0	0	0					
0	1	2	21	38	102	172	80	
0	1	4	26	50	120	180		*(Linha de ajuste de transporte)*
0	**1**	**4**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**	*Número gerado*

Raiz quadrada de 1461681 é: 1209

Com um duplo clique pode activar-se a folha de cálculo e, se desejar, pode experimentar o comportamento dinâmico na procura da solução, como se vê na próxima cópia da mesma secção da folha de cálculo.

				A	**B**	**C**	**D**	
			CM	***UM***	***C***	***D***	***U***	
				0	**1**	**6**	**8**	***Actualizar os valores de A, B, C e D apenas nesta linha***
				0	1	14	10	
				0	10	60	80	
			0	14	84	112		
		0	1	6	8			
	0	0	0	0				
0	0	0	0					
0	0	0	1	20	102	172	80	
0	0	0	4	32	120	180		*(Linha de ajuste de transporte)*
0	**0**	**0**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**	*Número gerado*

Raiz quadrada de 43681 é: 209

Um abraço