

O remate do Ronaldo e o Modellus



António Manuel Marques do Amaral
LAMEGO
1997

António Manuel Marques do Amaral
Urbanização da Ortigosa, Bloco 11 - 2.º Esq.
5100 LAMEGO
Sócio da APM n.º 2218

Introdução

Felizmente nestes últimos dias houve algum (pouco) tempo disponível... e joguei à bola com o Ronaldo.

O problema proposto oferecia à partida uma resolução simples do ponto de vista algébrico. Mas, seria de esperar haver gato escondido com rabo de fora. As suspeitas foram muitas, mas... não era fácil prová-las. Quando surgiu $d_{max} = \sqrt{30 \times 37,32}$ as suspeitas tornaram-se óbvias e fez-se alguma luz. Daí para a frente tentei, com satisfação pessoal e duma forma simples e informal, abordar o problema noutras perspectivas, valorizando a utilização do programa Modellus, que entendi ser o indicado.

A aplicação criada com o Modellus não pretende ser uma *obra prima*, mas apenas um ponto de partida para quem quiser tomar o primeiro contacto com o programa. Por isso, poderá alterá-lo a seu gosto, corrigindo-o, flexibilizando-o e melhorando-o, ou dando sugestões.

A *Password* para os ficheiros do Modellus é: **amma** (diferente de AMMA).

Os ficheiros fornecidos na disquete devem ser copiados para o directório **c:\modellus\ronaldo**, por forma a que os modelos funcionem em perfeitas condições. Ainda que tenha utilizado a versão 1.11 (Julho de 1996) do Modellus, os modelos funcionam também na versão portuguesa da versão internacional 1.0.

Os modelos foram criados no modo 1024x768, pelo que poderão ter necessidade de redimensionamento se forem executados noutra resolução.

Conteúdo da disquete

BOLA . BMP	Imagem do Modellus
CAMPOB . BMP	Imagem do Modellus
LEIAME . TXT	Ficheiro de texto com algumas instruções
QUAD . BMP	Imagem do Modellus
RECT . BMP	Imagem do Modellus
RONALDOC . ZIP	Ficheiro do Word com o presente documento
RONALDO . DRW	Ficheiro do Designer 3.1 com algumas figuras
RONALDO1 . MDL	Ficheiro do Modellus
RONALDO2 . MDL	Ficheiro do Modellus
RONALDO3 . MDL	Ficheiro do Modellus
RONALDO4 . MDL	Ficheiro do Modellus
RONALDO5 . MDL	Ficheiro do Modellus
RONALDOA . BMP	Imagem do Modellus

Com os melhores cumprimentos e
Votos de um Bom Ano,

A distância à linha de fundo do remate do Ronaldo

De acordo com os elementos da Figura 1, é

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{30}{d} \text{ e } \operatorname{tg} \beta = \frac{37,32}{d}.$$

Logo, sendo $\alpha = \beta - \gamma$, virá

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\beta - \gamma) = \frac{\frac{37,32}{d} - \frac{30}{d}}{1 + \frac{37,32}{d} \times \frac{30}{d}} = \frac{7,32 \times d}{30 \times 37,32 + d^2}.$$

Quando a amplitude de α for máxima também será máximo o valor de $\operatorname{tg} \alpha$.

Assim, sendo $F(d) = \frac{7,32 \times d}{30 \times 37,32 + d^2}$, determinemos o seu maximizante.

Ora,

$$\begin{aligned} F'(d) &= \frac{7,32 \times (30 \times 37,32 + d^2) - 7,32 \times d \times 2d}{(30 \times 37,32 + d^2)^2} \\ &= \frac{7,32 \times (30 \times 37,32 - d^2)}{(30 \times 37,32 + d^2)^2} \end{aligned}$$

pele que $d_{\max} = \sqrt{30 \times 37,32}$ é a distância à linha do fundo quando o ângulo com que o Ronaldo vê a baliza é o maior possível ($\alpha_{\max} = \operatorname{Arctg} \frac{7,32}{2 \times \sqrt{30 \times 37,32}}$)(6,24°).

Certamente, o Ronaldo rematará aproximadamente a 33,46 metros da linha de fundo.

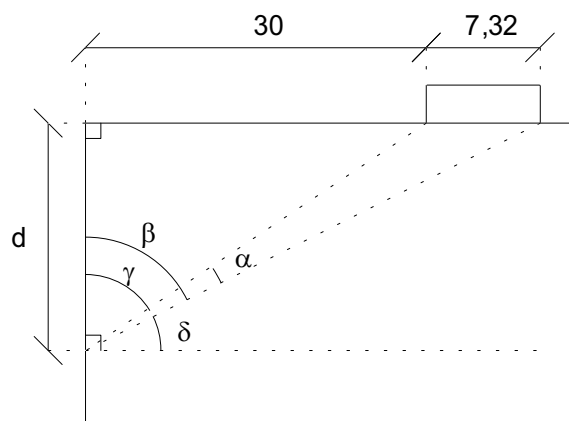


Figura 1

O ângulo de remate em qualquer posição no campo de futebol

Sejam C o comprimento de meia linha de fundo, B a largura da baliza, d a distância do Ronaldo à linha de fundo e x a distância à linha lateral, conforme é esquematizado na Figura 2.

Como $\operatorname{tg} \gamma = \frac{C-x}{d}$ e $\operatorname{tg} \beta = \frac{C+B-x}{d}$, será

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\beta - \gamma) = \frac{\frac{C+B-x}{d} - \frac{C-x}{d}}{1 + \frac{C+B-x}{d} \times \frac{C-x}{d}}.$$

Nota: Conforme o leitor poderá confirmar, esta relação é válida para $0 \leq x \leq 2C + B$.

Donde,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{B}{d}}{1 + \frac{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}{d^2}} = \frac{Bd}{d^2 + [(C-x)+B] \cdot (C-x)}.$$

Em qualquer posição no campo de futebol, a amplitude do ângulo de remate é dado por:

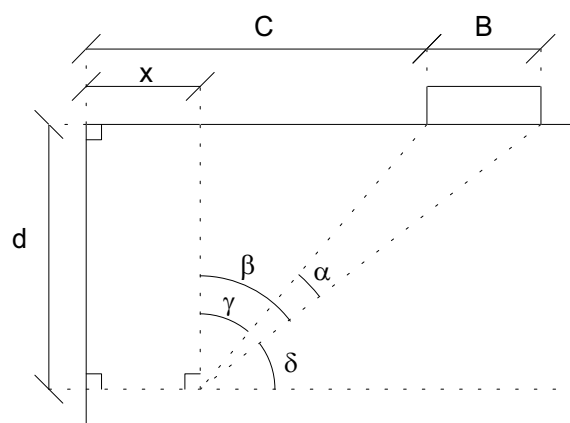


Figura 2

$$\alpha = \text{Arctg} \frac{Bd}{d^2 + [(C-x) + B] \cdot (C-x)}$$

A distância à linha de fundo para um ângulo de remate máximo, em qualquer posição no campo de futebol

Para uma distância x da linha lateral, quando a amplitude do ângulo de remate for máxima também o será o valor de

$$\text{tg } \alpha = F(d) = \frac{Bd}{d^2 + [(C-x) + B] \cdot (C-x)}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} F'(d) &= \frac{B[d^2 + [(C-x) + B] \cdot (C-x)] - 2Bd^2}{[d^2 + [(C-x) + B] \cdot (C-x)]^2} \\ &= \frac{B[(C-x) + B] \cdot (C-x) - d^2}{[d^2 + [(C-x) + B] \cdot (C-x)]^2} \end{aligned}$$

pele que $F'(d) = 0 \Leftrightarrow d = \sqrt{[(C-x) + B] \cdot (C-x)}$.

Assim, é de concluir que apenas existirá situação de ângulo máximo de remate para distâncias x da linha lateral, tais que $[(C-x) + B] \cdot (C-x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0, C[\cup]C+B, 2C]$.

Concluindo, a uma dada distância x da linha lateral, o ângulo de remate é máximo para a distância da linha de fundo dada pela expressão:

$$d_{\alpha_{max}} = \sqrt{[(C-x) + B] \cdot (C-x)} = \sqrt{(C+B-x)(C-x)}$$

sendo a amplitude máxima do ângulo de remate dada pelo valor de:

$$\alpha_{max} = \text{Arctg} \frac{B\sqrt{[(C-x) + B] \cdot (C-x)}}{2[(C-x) + B] \cdot (C-x)} = \text{Arctg} \frac{B}{2\sqrt{[(C-x) + B] \cdot (C-x)}} = \text{Arctg} \frac{B}{2 \times d_{\alpha_{max}}}$$

Como vimos, $d_{\alpha_{max}} = \sqrt{[(C-x) + B] \cdot (C-x)}$. Fazendo $d = \sqrt{[(C-x) + B] \cdot (C-x)}$, podemos obter:

$$\frac{\left(x - C - \frac{B}{2}\right)^2}{\left(\frac{B}{2}\right)^2} - \frac{d^2}{\left(\frac{B}{2}\right)^2} = 1$$

Curiosidade: O ângulo máximo de remate é obtido quando Ronaldo se posicionar no terreno de jogo sobre uma hipérbole equilátera de vértices nos postes da baliza e focos distanciados destes de $\left(\frac{B}{2}\right)^2 \times \sqrt{2}$.

Outras curiosidades do ângulo máximo no terreno de jogo

Considerando a Figura 3, que esquematiza uma situação de ângulo máximo de remate, obtém-se:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{C-x}{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}}$$

e

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}}{(C-x)+B}$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{C-x}{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}} \\ &= \frac{(C-x)\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}}{[(C-x)+B] \cdot (C-x)} \\ &= \frac{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}}{(C-x)+B} \\ &= \operatorname{tg} \delta \end{aligned}$$

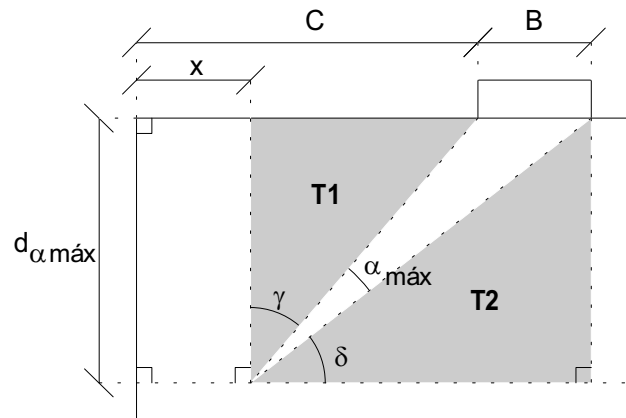


Figura 3

será $\gamma = \delta$ (como de início suspeitara, mas com dificuldade em obter prova).

Curiosidade: Fora da «faixa da baliza», o ângulo máximo de remate é obtido quando forem iguais os ângulos adjacentes a este, com um dos seus lados paralelo a um das linhas de fundo ou lateral.

Portanto, uma nova expressão da amplitude do ângulo máximo será:

$$\alpha_{\max} = 90^\circ - 2 \times \operatorname{Arctg} \frac{C-x}{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}}, \text{ para } x \in [0, C \cup]C+B, 2C].$$

Curiosidade: Fora da «faixa da baliza», o ângulo máximo de remate é obtido quando forem semelhantes os triângulos rectângulos T1 e T2, sendo a razão de semelhança:

$$r = \frac{T1}{T2} = \frac{C-x}{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}} = \frac{\sqrt{[(C-x)+B] \cdot (C-x)}}{(C-x)+B}, \text{ para } x \in [0, C \cup]C+B, 2C].$$

Curiosidade: Fora da «faixa da baliza», o ângulo máximo de remate é obtido quando forem semelhantes os rectângulos, R1 e R2, construídos pelas respectivas diagonais, cujos extremos são a posição do Ronaldo e cada um dos postes da baliza.

Curiosidade: A distância à linha de fundo, para se obter ângulo máximo de remate, é meio proporcional entre a largura de R1 e o comprimento de R2, isto é:

$$\frac{C-x}{d_{\max}} = \frac{d_{\max}}{(C-x)+B}$$

Curiosidade: Para se obter ângulo máximo de remate, a distância à linha de fundo é o comprimento do lado do quadrado de área equivalente à do rectângulo cujos comprimentos dos lados são as distâncias da posição do Ronaldo às rectas que são paralelas às linhas laterais e contêm os postes das balizas. Isto é:

O PROBLEMA DO Ronaldo É APENAS UM PROBLEMA DE QUADRATURA DUM RECTÂNGULO.

Posição no campo de futebol para um ângulo de remate constante

Como já vimos, $tg \alpha = \frac{Bd}{d^2 + [(C-x)+B] \cdot (C-x)}$.

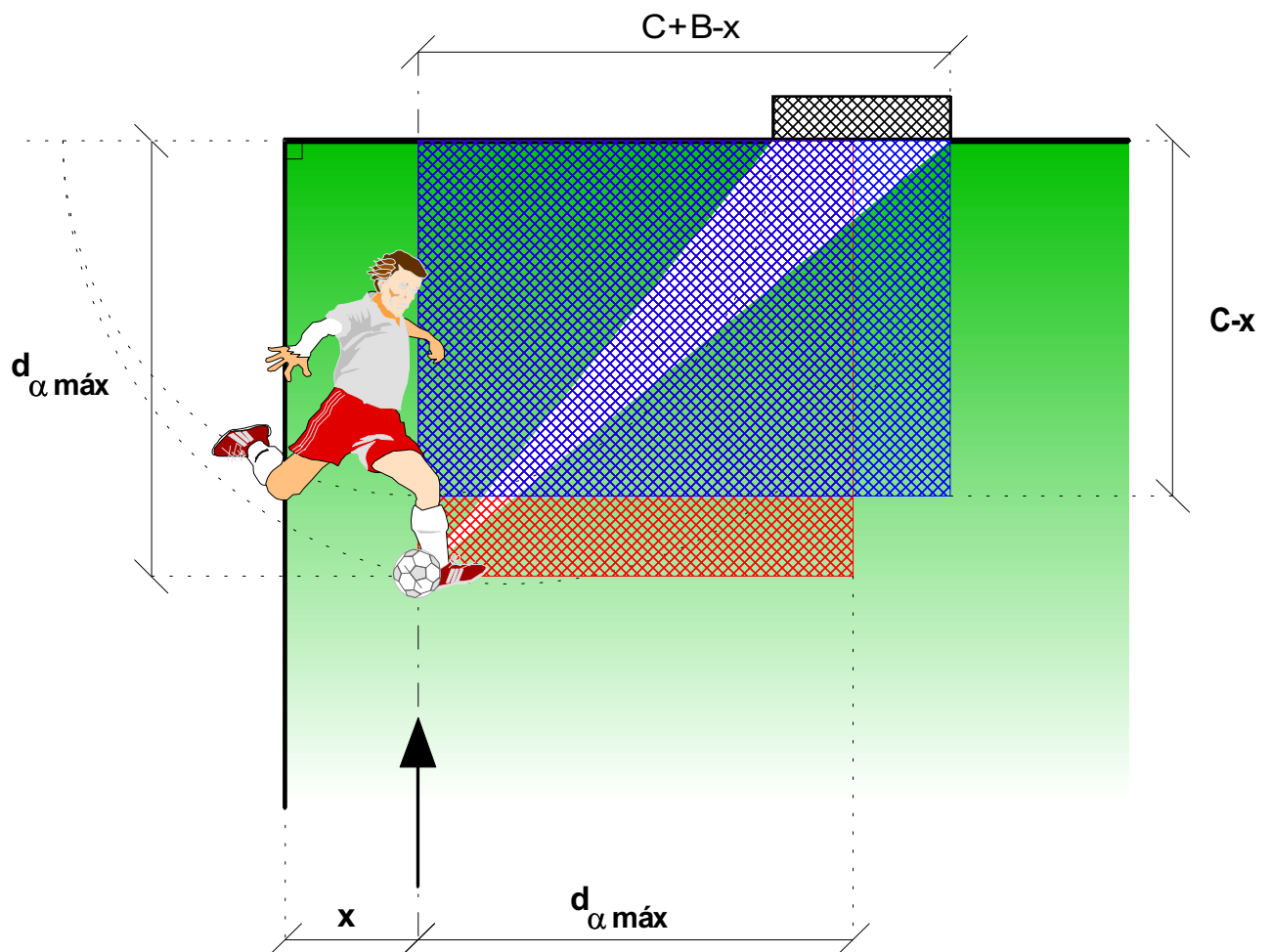
Fazendo $tg \alpha = k$, podemos obter:

$$\left(x - C - \frac{B}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{B}{2k}\right)^2 = \left(\frac{B \times \sqrt{k^2 + 1}}{2k}\right)^2$$

Concluindo, para ângulo de remate constante, o Ronaldo deve posicionar-se sobre arcos de circunferência de raio e centros variáveis, deslocando-se estes sobre uma recta paralela à linha lateral e que contém o centro do terreno.

Ronaldo, o Agrimensor

Momentos antes de ser expulso do jogo, diz quem viu, o Ronaldo fazia medições no campo de futebol.



Ronaldo, o Futurista

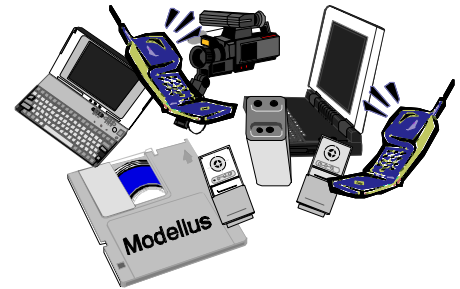


Os quatro jogos de suspensão são uma penalização severa e inqualificável, pensou Ronaldo. E como os árbitros de hoje são avessos à ciência!, suspirou.

Mas, em outras modalidades... É isso, a telemetria!

Se bem pensou, melhor o fez. Foi à loja do bairro e, com parte do prémio do seu último jogo, comprou um sensor de posição, dois computadores portáteis, dois modems, dois

micro telemóveis, ... e, claro, o **Modellus**.



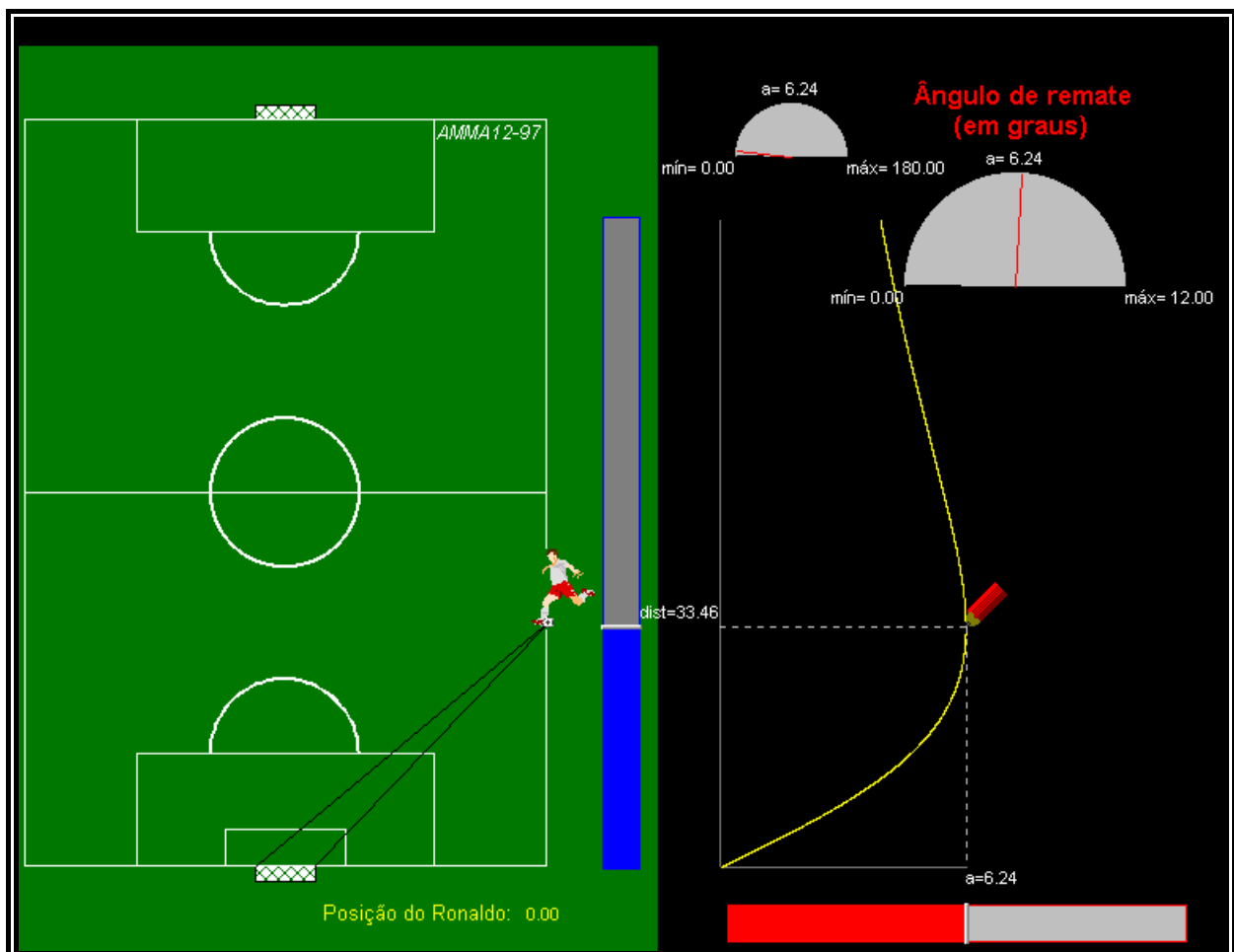
Ronaldo e o Modellus



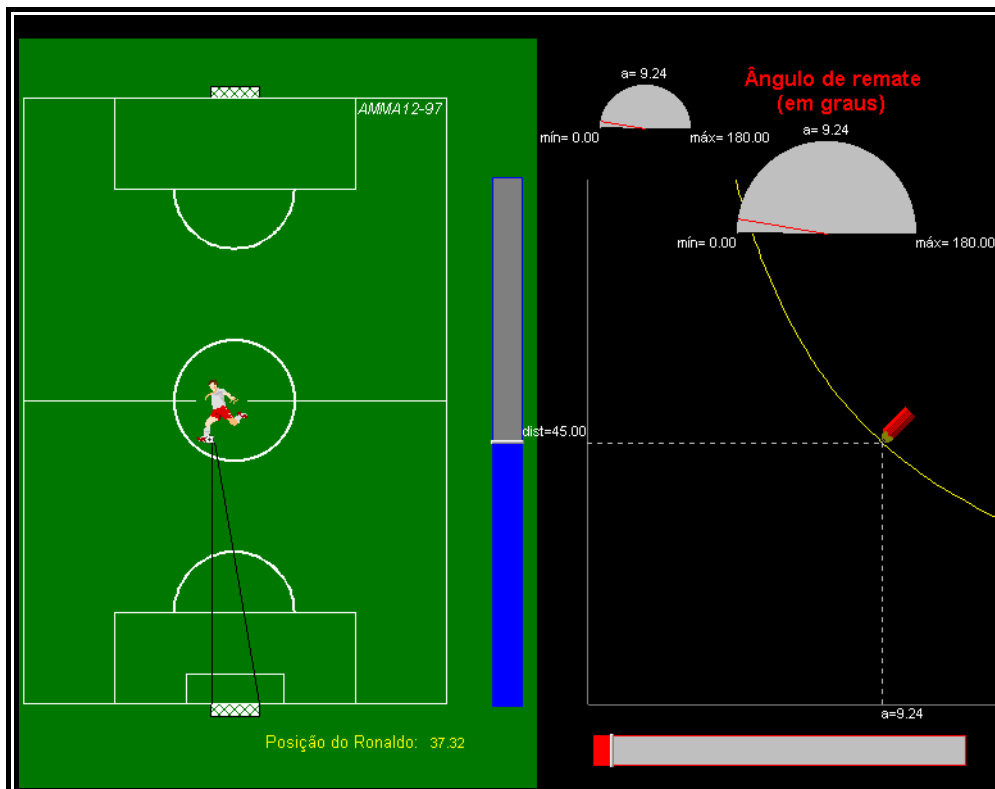
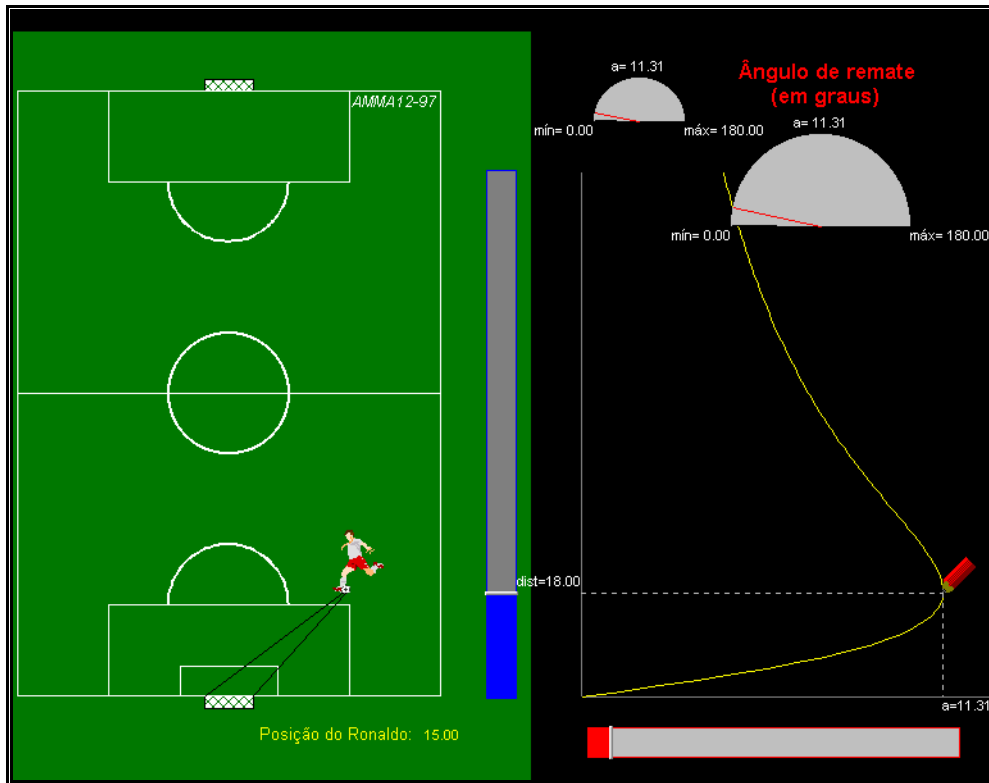
Depois da compra do equipamento, Ronaldo achou preferível a exploração do Modellus antes da contratação das equipas de engenheiros e de consultores.

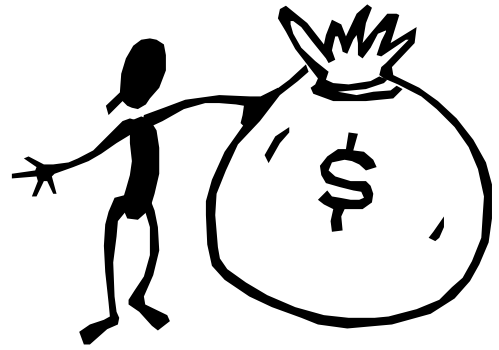
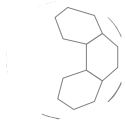
É que isto de ser o melhor avançado do mundo tem muito que se lhe diga...É por esse motivo que ganhamos o que ganhamos! Ninguém dá nada a ninguém!

Então, nada melhor que recordar o meu último remate, pensou Ronaldo.



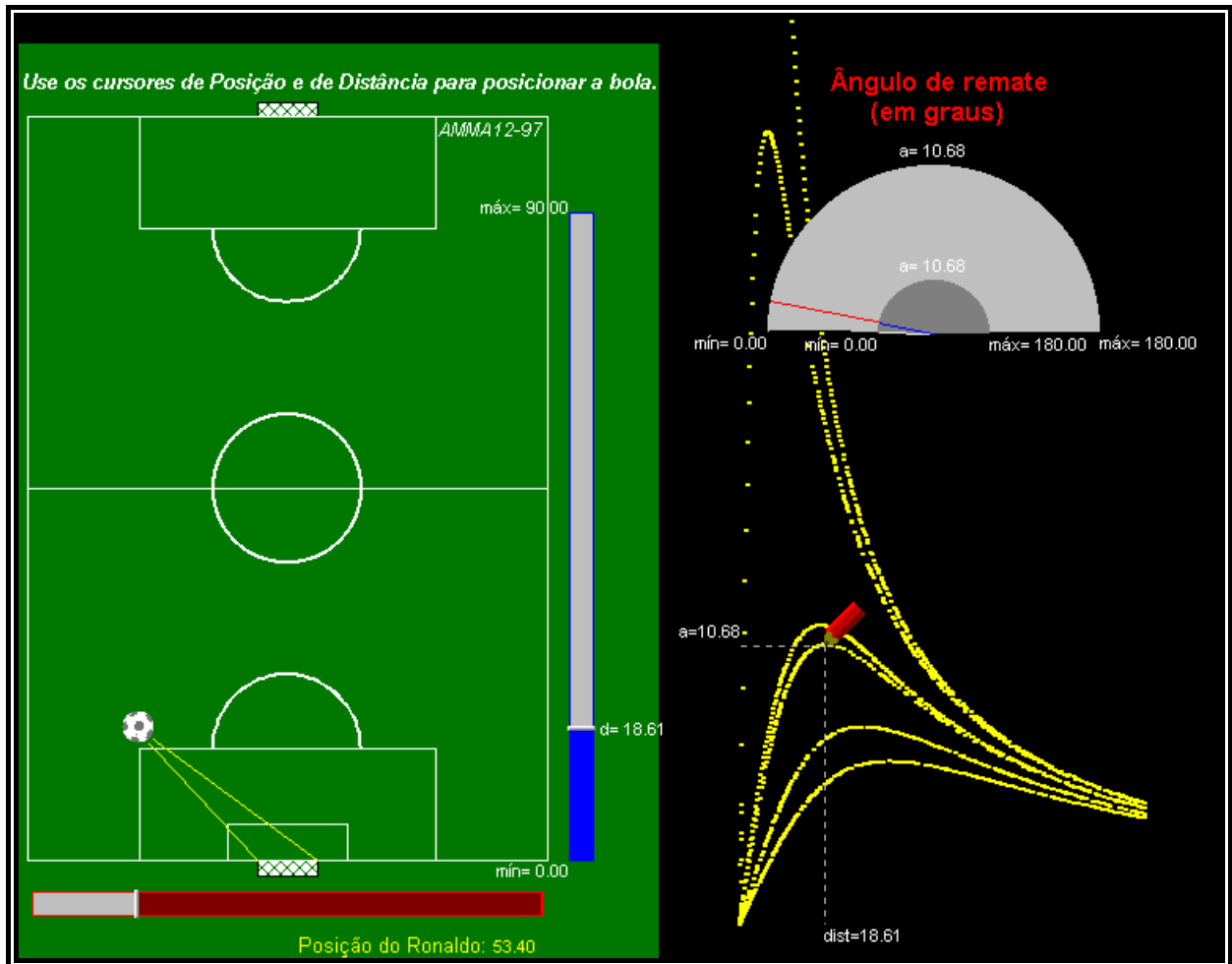
Depois explorou outros remates de jogos anteriores.

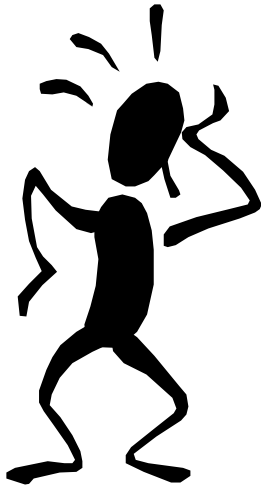




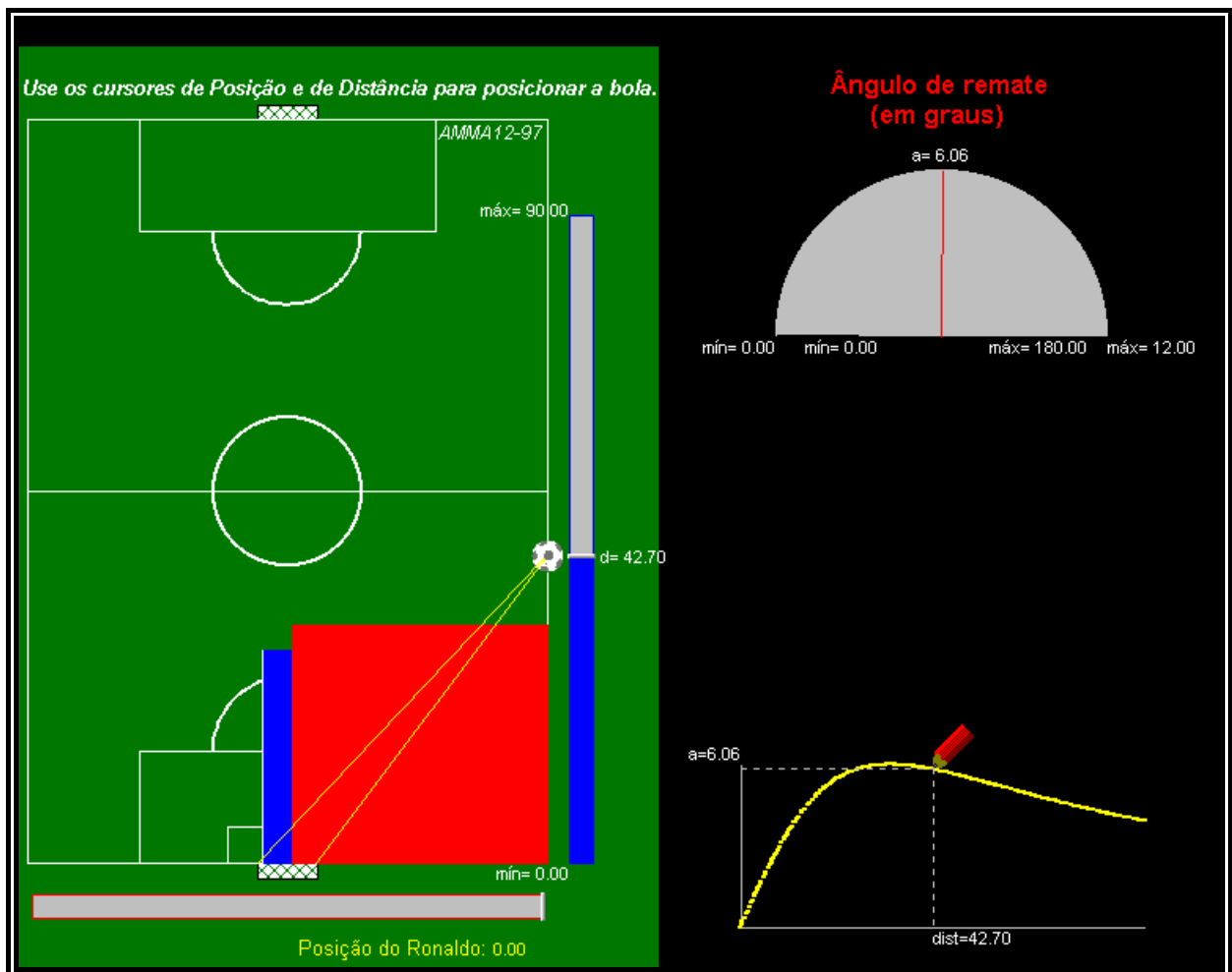
Na etapa seguinte explorou com pormenor os ângulos de remate em qualquer posição do campo de futebol.

É que os prémios de jogo são directamente proporcionais ao número de golos...





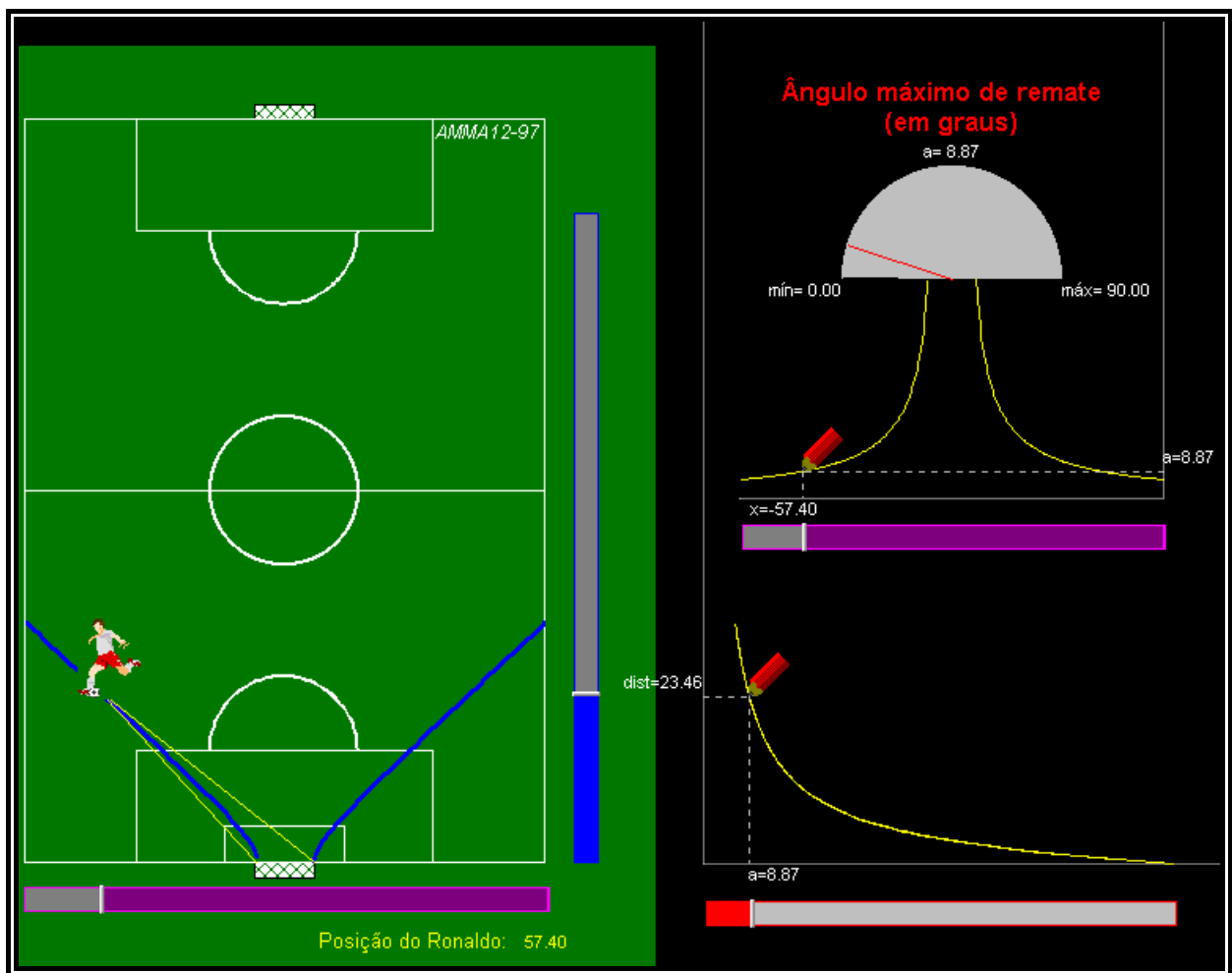
Ronaldo recorda o pesadelo do último jogo...



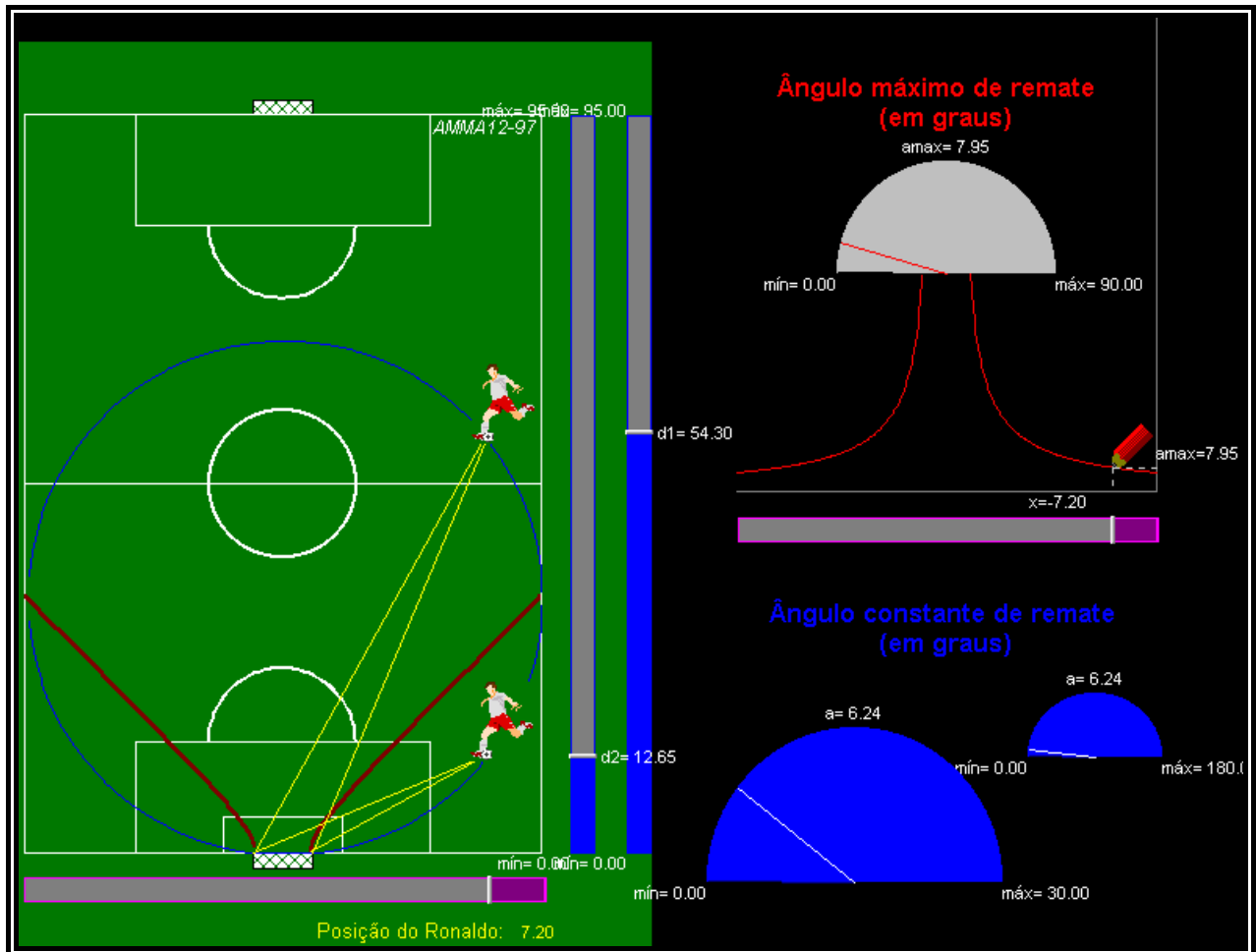


Ronaldo ouviu as más línguas falar de uma nova tinta invisível e inodora.

Então, deitou novamente mãos ao Modellus...



Ouviu também dizer que há quem marque golos em posição que não de ângulo máximo...



Com todas estas investigações o Ronaldo ficou indeciso.

Qual a melhor opção?

A telemetria ou a tinta?

Ou outra?

