Matemática A

Itens – 10.º Ano de Escolaridade

No Teste intermédio, que se irá realizar no dia 29 de Janeiro de 2010, os itens de grau de dificuldade mais elevado poderão ser adaptações de alguns dos itens que a seguir se apresentam.

1. Na figura 1 está representado um triângulo equilátero $[ABC]$. Os pontos D, E e F são os pontos médios dos lados do triângulo.

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a 16

Sejam X, Y e Z três pontos.

Sabe-se que:

- $X = B - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}$
- $Y = C - \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{FA}$
- $Z = A - 2\left(\overrightarrow{CF} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{DF}\right)$

Determine a área do triângulo $[XYZ]$

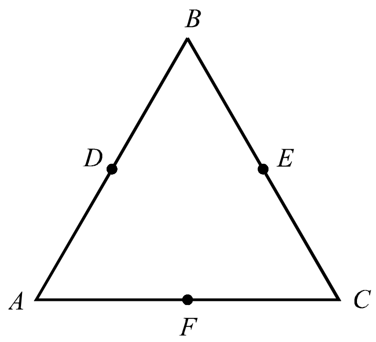

Figura 1

2. Na figura 2 está representado, num referencial o.n. xOy, o hexágono $[OABCDE]$

Sabe-se que:

- os lados do hexágono são paralelos e iguais dois a dois;
- os pontos A e E pertencem aos eixos coordenados Oy e Ox, respectivamente;
- o ponto B tem coordenadas $(4, 5)$
- o ponto D tem coordenadas $(6, 2)$

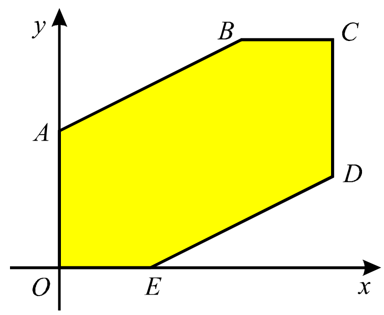

Figura 2

2.1. Determine as coordenadas dos pontos C, E e A

2.2. Seja M o ponto simétrico do ponto B em relação ao eixo Oy e seja N o ponto da recta OD que é colinear com os pontos M e A

Determine as coordenadas do ponto N

2.3. Escreva uma condição que defina o segmento de recta $[ED]$

2.4. Escreva uma condição que defina o conjunto dos pontos que constituem o interior do hexágono.

3. Na figura 3 está representado, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

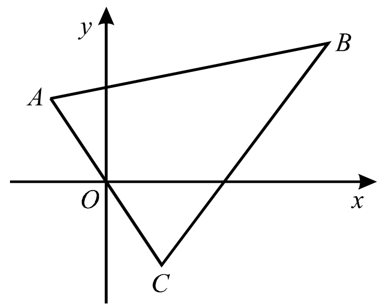

Figura 3

- o ponto O, origem do referencial, é o ponto médio do lado $[AC]$
- o vector $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(10, 2)$
- o vector $\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(-6, -8)$

3.1. Determine as coordenadas do ponto A e as coordenadas do ponto C

3.2. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(8, 5)$

3.3. Seja D o ponto de intersecção da recta AB com o eixo Oy

Determine a área do triângulo $[AOD]$

3.4. Averigúe qual é a posição da origem do referencial em relação à circunferência de diâmetro $[AB]$

4. Sejam a e b dois números reais positivos.

Num referencial o.n. xOy, considere:

- a recta r de equação reduzida $y = ax + b$
- a recta s de equação reduzida $y = -2ax + b$
- o ponto A, ponto de intersecção da recta r com o eixo das abcissas;
- o ponto B, ponto de intersecção das rectas r e s
- o ponto C, ponto de intersecção da recta s com o eixo das abcissas.

4.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada, em função de a e de b, por $\frac{3b^2}{4a}$

4.2. Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$, admitindo que este triângulo tem área igual a 225 e que o vector de coordenadas $(3, 4)$ é paralelo a um dos seus lados.

4.3. Na figura 4 está representado o triângulo $[ABC]$ para o caso de $a = 3$ e $b = 9$

Os pontos A' e C' pertencem a $[AB]$ e a $[BC]$, respectivamente.

Sabe-se que $[AA'C'C]$ é um trapézio cuja área é $\frac{8}{9}$ da área do triângulo $[ABC]$

Determine as coordenadas dos pontos A' e C'

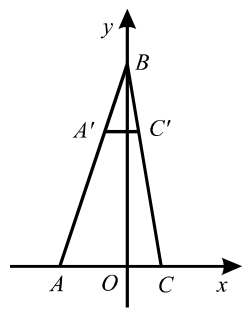

Figura 4

5. Na figura 5 está representado, num referencial o.n. xOy, o quadrilátero $[ABCD]$

Sejam P, Q, R e S os pontos médios dos lados desse quadrilátero.

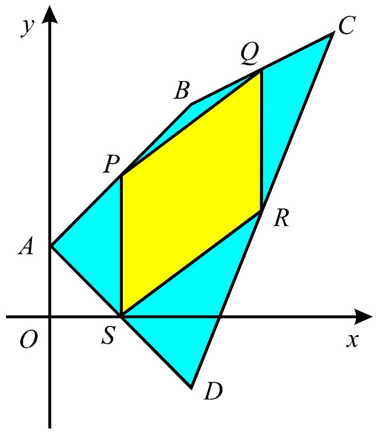

Figura 5

5.1. Mostre que o quadrilátero $[PQRS]$ é um paralelogramo, utilizando operações com vectores.

5.2. Admita que as coordenadas dos pontos P, Q, R e A são:

- $P(2,4)$
- $Q(6,7)$
- $R(6,3)$
- $A(0,2)$

Determine as coordenadas do ponto S e as coordenadas dos vértices B, C e D do quadrilátero $[ABCD]$

6. Na figura 6 estão representados, num referencial o.n. xOy, dois paralelogramos semelhantes, $[ABCD]$ e $[AEFG]$

Sabe-se que:

- A tem coordenadas $(-1, -2)$
- B tem coordenadas $(-4, 2)$
- C tem coordenadas $(8, 10)$
- $\overline{AF} = 10$

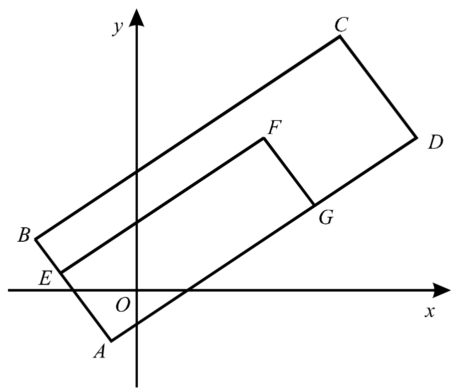

Figura 6

6.1. Determine as coordenadas do ponto D e as coordenadas do ponto F

6.2. Defina, analiticamente, o triângulo $[ABC]$ (incluindo o seu interior).

6.3. Suponha que, num dado instante, dois pontos partem de A e se deslocam, um sobre a semi-recta $\dot{A}B$ e o outro sobre a semi-recta $\dot{A}C$. Admita que a unidade do referencial é o centímetro e que qualquer dos pontos percorre cada centímetro num minuto.

A que distância, um do outro, se encontram os dois pontos, cinco minutos depois de iniciarem o seu deslocamento?

7. Considere, num referencial o.n. xOy , o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem a condição $y < x$. Seja A esse conjunto de pontos.

7.1. Represente graficamente:

- uma recta r que esteja contida em A
- uma recta s que não intersecte A
- uma recta t tal que o conjunto das abcissas dos pontos de intersecção dessa recta com A seja $]2, +\infty[$

Escreva as equações reduzidas das rectas r, s e t que desenhou.

7.2. Determine o conjunto dos valores reais de k para os quais o ponto de coordenadas $(k, 6-k)$ não pertence a A

8. Na figura 7 está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- o centro do cubo coincide com a origem do referencial;
- as arestas do cubo são paralelas aos eixos coordenados;
- os pontos M, N e P são os pontos médios das arestas a que pertencem;
- o ponto A tem coordenadas $(1,1,1)$

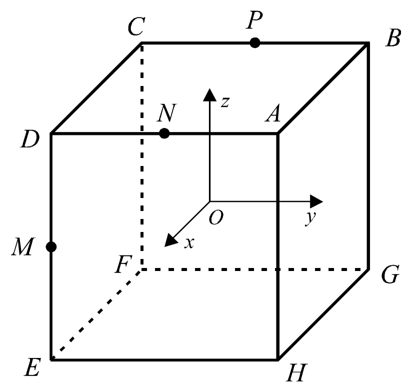

Figura 7

Considere o vector $\overrightarrow{u}$ e os pontos X, Y e Z

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BP}$
- $X = A + \overrightarrow{CG}$
- $Y = X + \frac{1}{2}\overrightarrow{XF}$
- $Z = X + \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{AC}\right)$

8.1. Represente os pontos X, Y e Z (por construção geométrica, sem recorrer a coordenadas).

8.2. Defina, por uma condição, o lugar geométrico dos pontos W para os quais o ponto X pertence ao plano mediador do segmento $[BW]$

Identifique esse lugar geométrico, no contexto do problema.

8.3. A recta definida pela equação $(x,y,z) = (1,-1,-1) + k(0,1,1)$, $k \in \mathbb{R}$ intersecta a recta XD

Determine as coordenadas do ponto de intersecção.

8.4. A secção produzida no cubo pelo plano definido pelos pontos E, Y e Z divide o cubo em dois sólidos.

Determine o volume do sólido que contém o ponto G

9. Na figura 8 está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- um dos vértices do cubo coincide com a origem do referencial;
- os vértices A, C e E pertencem aos eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente;
- o vértice G tem coordenadas $(10, 10, 10)$
- o ponto P pertence à aresta $[FG]$ e tem ordenada 3
- o ponto Q pertence à aresta $[ED]$ e tem ordenada 7
- o ponto S pertence à aresta $[BC]$ e tem abcissa 5
- a secção determinada no cubo pelo plano PQS é o pentágono $[PQRST]$

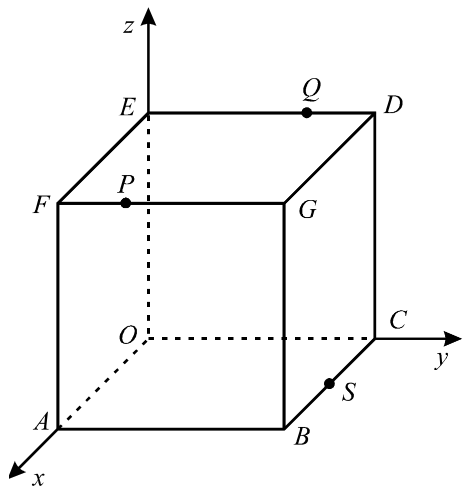

Figura 8

9.1. Determine as coordenadas dos vértices do pentágono $[PQRST]$

9.2. Seja I o ponto de intersecção da recta PQ com o plano xOz

Determine a área do triângulo $[EIC]$

10. Na figura 9 está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(14, -7, 4)$
- o ponto B tem coordenadas $(16, -4, 10)$
- o ponto C tem coordenadas $(10, -6, 13)$
- o ponto E tem coordenadas $(8, 5, 0)$

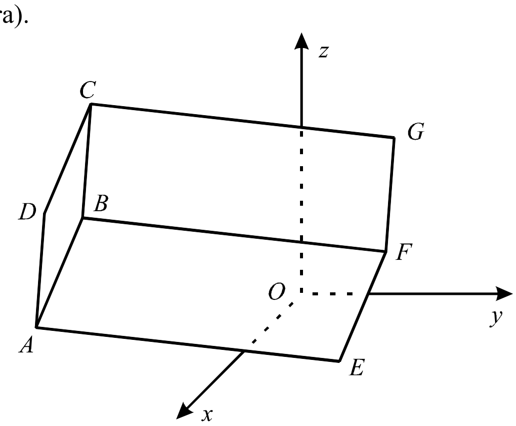

Figura 9

10.1. Determine as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

10.2. Determine o volume do prisma.

10.3. Defina, por uma condição, a aresta $[AB]$

10.4. Escreva uma equação da superfície esférica que contém os oito vértices do prisma.

10.5. Determine a área da secção produzida no prisma pelo plano ABG

10.6. Determine uma equação do plano DBF

Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz = d$
(a, b, c e d designam números reais)

Nota: o plano DBF é o plano mediador de um segmento cujos extremos são dois vértices do prisma.