Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática A

Ano Lectivo 2000/10 ***Conjunto IR*** *- Operações com radicais, racionalização de denominadores e enquadramentos* **10.º Ano**

Nome: ______________________________	N.º: ___ Turma: ___

NÚMEROS IRRACIONAIS

Números irracionais são números que não é possível representar na forma de fracção, isto é, que não podem ser escritos como razão de dois números inteiros.

As dízimas dos números irracionais são sempre infinitas não periódicas.

O conjunto dos números reais, *IR*, compreende os números racionais e irracionais.

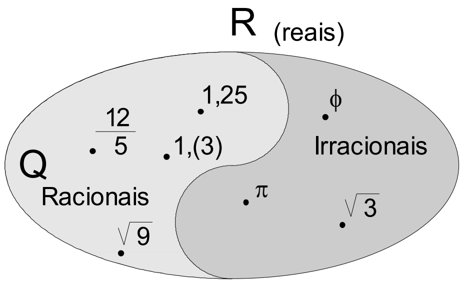
As dízimas finitas e as dízimas infinitas periódicas representam sempre números racionais.

Por exemplo, determinemos a fracção correspondente ao número racional $3,(14)$:

Designando $3,(14)$ por x, temos:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 314,(14) \\ x & = & 3,(14) \\ \hline 99x & = & 311,(00) \end{array} \qquad \text{(subtraindo ordenadamente)}$$

Logo, $x = \dfrac{311}{99}$.



Um irracional famoso

Talvez o mais famoso número irracional seja o PI (π), o quociente entre o perímetro e o diâmetro de um círculo. As calculadoras científicas têm uma tecla para acesso directo a um valor aproximado de π com dez, ou mais, dígitos. Por vezes, quando se calcula o perímetro ou uma área de um círculo utiliza-se 3,14 como valor aproximado de π, mas actualmente ele já foi calculado com milhões de casas decimais.

OPERAÇÕES COM RADICAIS

Em certas situações particulares é possível operar com raízes quadradas, raízes cúbicas, ...

Radicais equivalentes

A propriedade seguinte tem duas aplicações: simplificação de radicais e redução de radicais ao mesmo índice.

> Para todo o número real positivo x e para $n, m, p \in N$,
> $$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\times p]{x^{m\times p}}$$

Exemplos

$$\sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10\div 5]{2^{5\div 5}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[1]{2^2} = 4$$

Escrever, por ordem crescente, $\sqrt[4]{4}$ e $\sqrt[3]{3}$.

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4\times 3]{4^3} = \sqrt[12]{64}$ e $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\times 4]{3^4} = \sqrt[12]{81}$.

Logo, $\sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$.

Adição e subtracção de radicais

É possível traduzir a soma e a diferença de radicais por um único radical quando tiverem o mesmo índice e o mesmo radicando.

> Para todo o número real positivo x e para $n \in N$,
> $$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$$

Exemplos

$$\sqrt{5}+4\sqrt{5} = (1+4)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{5}-4\sqrt{3}+7\sqrt{5}+3\sqrt{3} = (2+7)\sqrt{5}+(3-4)\sqrt{3} = 9\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$4\sqrt[7]{6}+2\sqrt[5]{2}-7\sqrt[5]{2}+3\sqrt[7]{6} = (4+3)\sqrt[7]{6}+(2-7)\sqrt[5]{2} = 7\sqrt[7]{6}-5\sqrt[5]{2}$$

Multiplicação de radicais

O produto de dois radicais com o mesmo índice é um radical ainda com o mesmo índice, cujo radicando é o produto dos radicandos.

Para todos os números reais positivos x e y e para $n \in N$,

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

Exemplos

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5 \times 3} = \sqrt[3]{15}$$

$$3\sqrt{2} \times 4\sqrt{7} = (3 \times 4) \times \sqrt{2 \times 7} = 12\sqrt{14}$$

$$4\sqrt[5]{3} \times 2\sqrt[5]{2} - 7\sqrt[7]{2} \times 3\sqrt[7]{6} = (4 \times 2)\sqrt[5]{3 \times 2} - (7 \times 3)\sqrt[7]{2 \times 6} = 8\sqrt[5]{6} - 21\sqrt[7]{12}$$

Divisão de radicais

O quociente de dois radicais com o mesmo índice é um radical ainda com o mesmo índice, cujo radicando é o quociente dos radicandos.

Para todos os números reais positivos x e y e para $n \in N$,

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Exemplos

$$\sqrt[3]{5} \div \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5 \div 3} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{8\sqrt{12}}{4\sqrt{6}} = \frac{8}{4}\sqrt{\frac{12}{6}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{6 \times 5}{3}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{10}$$

Passar um factor para dentro ou para fora do radical

Pode sempre escrever-se o produto de um número racional por um radical sob a forma de um radical, bastando para isso escrever o número racional na forma de radical e, em seguida, multiplicar os dois radicais.

Para todo o número racional x e real y positivos e para $n \in N$,

$$x \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \times y}$$

Exemplos

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = \sqrt{45}$$

$$2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{56}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

Potência de um radical

A potência de um radical é um radical ainda com o mesmo índice, cujo radicando é a potência do radicando.

Para todo o número real positivo x e para $n, p \in N$,

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$$

Exemplos

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^4 = \sqrt[3]{7^4} = 7\sqrt[3]{7}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$$

Radical de um radical

O radical de um radical é outro radical cujo índice é o produto dos índices e o radicando é o mesmo número.

Para todo o número real positivo x e para $n, p \in N$,

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$$

Exemplos

$$\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \times 2}} = \sqrt[4]{8}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^2 \times 3}} = \sqrt[12]{12}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Qual dos números, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$, é maior?

Determinar mentalmente um valor aproximado de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é relativamente fácil, pois sabemos que $1{,}4$ é um valor aproximado de $\sqrt{2}$, às décimas. Mas, determinar mentalmente um valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ já não é tarefa fácil.

Bem... quem diria que as fracções são equivalentes?! Com efeito: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

O denominador da fracção $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é um número irracional, enquanto o denominador de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é um número racional. Diz-se que ***racionalizámos o denominador*** da primeira fracção. Esta é a transformação que, por norma, se aplica a todos os resultados em forma de fracção com denominador irracional.

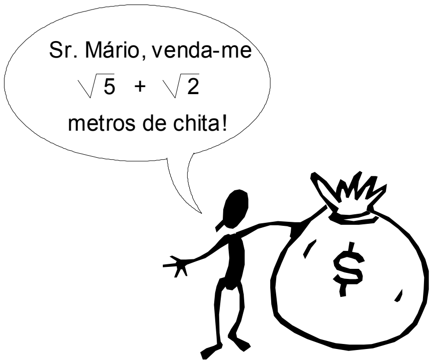
Exemplos

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}} = \frac{4}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{4-4\sqrt{2}}{1-2} = 4\sqrt{2}-4$$

ENQUADRAMENTOS



Há muitas situações em que se torna útil, e mesmo necessário, conhecer enquadramentos para os resultados de adições e multiplicações em que intervêm valores aproximados.

Enquadramento da soma

Calculemos um valor aproximado de $\sqrt{5} + \sqrt{10}$.

Sabendo que $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$ e que $\sqrt{10} = 3{,}16227\ldots$, utilizemos, por exemplo, valores aproximados a menos de uma centésima:

$$\begin{array}{rcccl} 2{,}23 & < & \sqrt{5} & < & 2{,}24 \\ 3{,}16 & < & \sqrt{10} & < & 3{,}17 \\ \hline 5{,}39 & < & \sqrt{5}+\sqrt{10} & < & 5{,}41 \end{array}$$

(adicionando ordenadamente)

$5{,}39$ é um valor aproximado da soma $\sqrt{5} + \sqrt{10}$, **por defeito**;

$5{,}41$ é um valor aproximado da soma $\sqrt{5} + \sqrt{10}$, **por excesso**;

Qualquer número compreendido entre $5{,}39$ e $5{,}41$ é um valor aproximado de $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ **com erro inferior a** $0{,}02$ ($5{,}41 - 5{,}39 = 0{,}02$), ou seja, um **valor aproximado da soma a menos de duas centésimas**.

Diz-se que $0{,}02$ é um **majorante do erro** cometido naquela aproximação.

Enquadramento do produto

Calculemos um valor aproximado de $\sqrt{5} \times \pi$.

Sabendo que $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$ e que $\pi = 3{,}141592\ldots$, utilizemos, por exemplo, valores aproximados a menos de uma décima:

$$\begin{array}{ccccc} 2{,}2 & < & \sqrt{5} & < & 2{,}3 \\ 3{,}1 & < & \pi & < & 3{,}2 \\ \hline 6{,}82 & < & \sqrt{5}\times\pi & < & 7{,}36 \end{array} \qquad \text{(multiplicando ordenadamente)}$$

$6{,}82$ é um valor aproximado do produto $\sqrt{5} \times \pi$, **por defeito**;

$7{,}36$ é um valor aproximado da soma $\sqrt{5} \times \pi$, **por excesso**;

Qualquer número compreendido entre $6{,}82$ e $7{,}36$ é um valor aproximado de $\sqrt{5} \times \pi$ **com erro inferior a** $0{,}54$ ($7{,}36 - 6{,}82 = 0{,}54$), ou seja, um **valor aproximado da soma a menos de 54 centésimas**.

Diz-se que $0{,}54$ é um **majorante do erro** cometido naquela aproximação.

<u>EXERCÍCIOS</u>

1. Calcule:

a) $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$ **c)** $\dfrac{2}{3}\sqrt{2} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + 0{,}1\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2}$

2. Calcule

a) $(\sqrt{2} + 1)^2 - 2\sqrt{2}$ **b)** $(3\sqrt{2} - 1)^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **c)** $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3) + \sqrt{3}$

3. Calcule:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}1} \times \sqrt[3]{10}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}$

4. Calcule:

a) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$ **c)** $\sqrt[3]{6} \div \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2}$

5. Calcule:

a) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{3}{4}} - \sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[6]{4}$

6. Simplifique cada uma das expressões:

a) $\sqrt{32}$ **b)** $5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$ **c)** $\dfrac{1}{3}\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{12}$

7. Efectue as operações indicadas e apresente o resultado na forma mais simples:

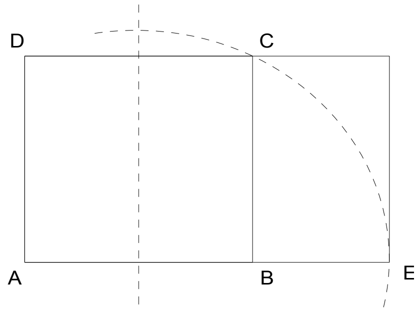
a) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5}$ **b)** $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ **c)** $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$ **e)** $\sqrt{30} \div \sqrt{10}$

b) $\sqrt[3]{28} \div \sqrt[3]{7}$ **g)** $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ **h)** $\sqrt{7}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$ **i)** $-\sqrt{27} + \sqrt{3} + \sqrt{75}$ **j)** $\sqrt{32} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{18} - 9\sqrt{2}$

8. Racionalize os denominadores das seguintes expressões:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

9. Considere um quadrado [ABCD] com 1 dm de lado.
Determine a mediatriz de [AB].
Com centro no ponto médio de [AB] trace um arco de circunferência que passe por C até encontrar o prolongamento de [AB] para o lado de B no ponto E.
Desenhe o rectângulo de lados [AD] e [AE].



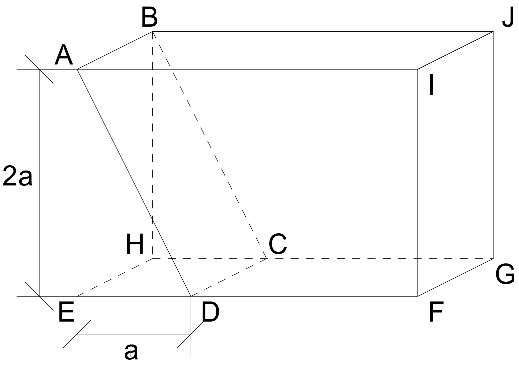
a) Determine o comprimento exacto do lado maior do rectângulo (ϕ).

b) Sabendo que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}238$, entre que valores varia o lado maior do rectângulo?

c) Determine o perímetro exacto do rectângulo.

10. A figura representa um paralelepípedo rectângulo seccionado pelo plano ABC que o separou em dois sólidos diferentes.

$\overline{AB} = 9$ cm
$\overline{EF} = 3 \cdot \overline{ED}$
O volume do sólido menor resultante da divisão é $49\ \text{cm}^3$.



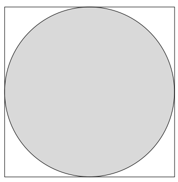
a) Determine $\overline{ED}$.

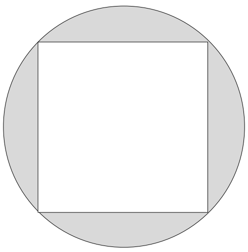
b) Determine o volume do sólido maior obtido no corte.

11. Considere um prisma quadrangular regular em que a altura é o dobro da aresta da base.

a) Representando por ***a*** a aresta da base, obtenha as medidas de todas as diagonais do prisma.

b) Determine a medida da aresta da base para que o volume seja $200\ \text{cm}^3$.

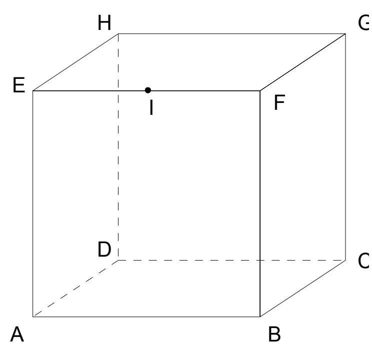




12. Desenhe um quadrado e um círculo inscrito.
Calcule o perímetro e a área do círculo inscrito num quadrado de lado 1.
Indique o valor exacto e um valor aproximado.

13. Desenhe um quadrado e um círculo circunscrito.
Calcule o perímetro e a área do círculo circunscrito a um quadrado de lado 1.
Indique o valor exacto e um valor aproximado.

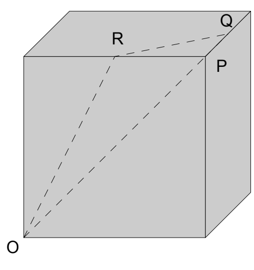
14. Considere o cubo da figura.
I é o ponto médio de [EF].



a) Desenhe a secção resultante da intersecção do cubo pelo plano CIH.
Explique o seu raciocínio.

b) Classifique, justificando, o quadrilátero obtido.

c) Calcule o valor exacto do perímetro da secção, sabendo que o comprimento da aresta é 2 cm.



15. Duas formigas vão de O a Q pelas paredes de um cubo, à mesma velocidade (R e Q são os pontos médios das arestas). A formiga A segue o trajecto ORQ e a formiga B o OPQ.

a) Qual das formigas chega primeiro?

b) Sabendo que a aresta do cubo é 2 dm, determine a diferença dos comprimentos dos trajectos, com aproximação à décima de milímetro.

SOLUÇÕES

1. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{49\sqrt{2}}{15}$; $\sqrt[3]{3}+3\sqrt{3}$.

2. 3; $19-\frac{17\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{3}-7$.

3. $\sqrt{14}$; 1; $\sqrt[3]{6}$.

4. 2; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{4}$.

5. $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt[3]{2}$.

6. $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

7. $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt{2}$; 5; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$; $7+\sqrt{35}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$.

8. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\sqrt{3}$; $1+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

9. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dm; Varia entre 1,618 dm e 1,619 dm; ($3+\sqrt{5}$) dm.

10. $\frac{7}{3}$ cm; 245 cm^3.

11. $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{5}$; $a\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{100}$ cm.

12. $P=\pi$; 3,14. $A=\frac{\pi}{4}$; 0,79.

13. $P=\sqrt{2}.\pi$; 4,44. $A=\frac{\pi}{2}$; 1,57.

14.

b) Trapézio isósceles.

c) ($3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$) cm.

15. Trajecto ORQ: $a\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$; Trajecto OPQ: $a\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$ (designando *a* a medida da aresta). 17,8 milímetros.

O Professor