Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

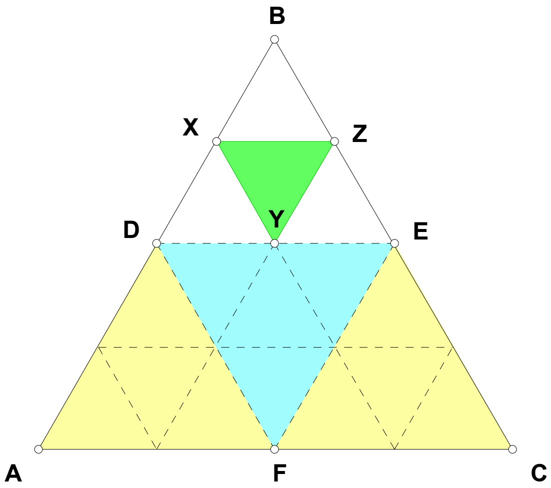
Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho do GAVE

Ano Lectivo 2009/10 ***Geometria 3*** **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.

Ora,



$$\begin{aligned} X &= B - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= C - \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} \\ &= C + \overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} \end{aligned}$$

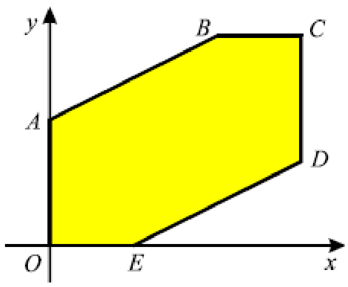
$$\begin{aligned} Z &= A - 2\left(\overrightarrow{CF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}\right) \\ &= A + 2\overrightarrow{FC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD} \\ &= A + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CE} \end{aligned}$$

Conclui-se que X, Y e Z são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos de recta [BD], [DE] e [BE].

Consequentemente, $A_{[XYZ]} = \frac{1}{4} \times \frac{A_{[ABC]}}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{16}{4} = 1$.

2.

a)



Como os lados [BC] e [OE] são paralelos, então $y_C = y_B = 5$.

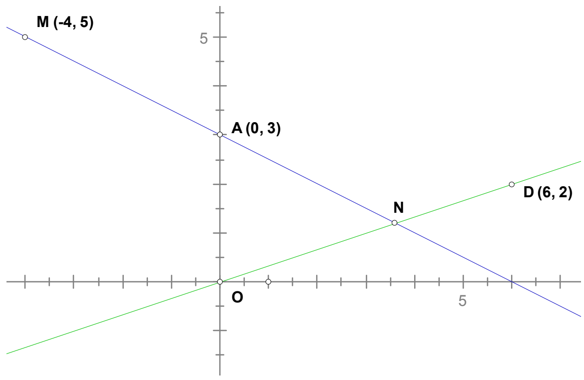
Como os lados [CD] e [AO] são paralelos, então $x_C = x_D = 6$.

Logo, $C(6,5)$.

Sendo $\overline{BC} = 2$ e os lados [BC] e [OE] paralelos e iguais, então $E(2,0)$.

Sendo $\overline{CD} = 3$ e os lados [CD] e [AO] paralelos e iguais, então $A(0,3)$.

b)



Sendo M o ponto simétrico do ponto $B(4,5)$ em relação ao eixo *Oy*, então $M(-4,5)$.

O ponto N é o ponto de intersecção das rectas AM e OD, pois pertence a ambas as rectas.

Como o declive da recta AM é $m_{AB} = \frac{5-3}{-4-0} = -\frac{1}{2}$

e a ordenada na origem é $b_{AM} = 3$, então

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ é a equação reduzida dessa recta.

Como o declive da recta OD é $m_{OD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e a

ordenada na origem é $b_{OD} = 0$, então $y = \frac{1}{3}x$ é a equação reduzida dessa recta.

Assim temos:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{3}x \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+18=2x \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{18}{5} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases}. \qquad \text{Logo, } N(\frac{18}{5},\frac{6}{5}).$$

c)

Como $\overrightarrow{ED}=D-E=(6,2)-(2,0)=(4,2)$, então $(x,y)=(2,0)+k(4,2), k\in\mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta ED. Assim, a condição $(x,y)=(2,0)+k(4,2), k\in[0,1]$ define o segmento de recta [ED].

<u>Alternativa 1</u>:

Sendo $m_{ED}=\underbrace{\frac{2}{4}}_{\frac{u_2}{u_1}}=\frac{2-0}{6-2}=\frac{1}{2}$, então a equação reduzida da recta ED é da forma $y=\frac{1}{2}x+b$.

Dado que o ponto E pertence a essa recta, as suas coordenadas têm de verificar esta equação.

Assim, temos: $0=\frac{1}{2}\times 2+b \Leftrightarrow b=-1$. Portanto, $y=\frac{1}{2}x-1$ é a equação reduzida da recta ED.

Portanto, a condição $y=\frac{1}{2}x-1 \quad \wedge \quad x\in[2,6]$ define o segmento de recta [ED].

<u>Alternativa 2</u>:

Da equação vectorial indicada acima, resulta:

$$\begin{cases} x=2+4k \\ y=0+2k \end{cases}, k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{x-2}{4} \\ k=\frac{y}{2} \end{cases}, k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y}{2}=\frac{x-2}{4} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-1.$$

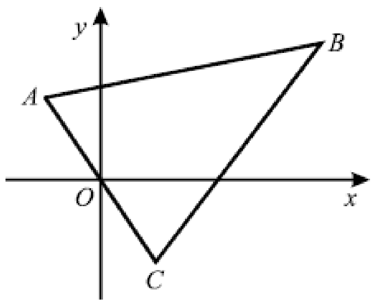
Portanto, $y=\frac{1}{2}x-1$ é a equação reduzida da recta ED.

Portanto, a condição $y=\frac{1}{2}x-1 \quad \wedge \quad x\in[2,6]$ define o segmento de recta [ED].

d)

A condição $0<x<6 \quad \wedge \quad 0<y<5 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x-1<y<\frac{1}{2}x+3$ define o conjunto de pontos que constituem o interior do hexágono.

3.



a)

Ora, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(10,2)+(-6,-8)=(4,-6)$.

Como os pontos A e C são simétricos em relação à origem do referencial, as suas coordenadas são simétricas. Logo, sendo $A(-x,-y)$, será $C(x,y)$ e, portanto, $\overrightarrow{AC}=C-A=(x,y)-(-x,-y)=(2x,2y)$.

Assim, vem $\begin{cases} 2x=4 \\ 2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ e, portanto, $A(-2,3)$ e $C(2,-3)$.

b)

Ora, $B=A+\overrightarrow{AB}=(-2,3)+(10,2)=(8,5)$.

c)

Sendo $m_{AB}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, então a equação reduzida da recta AB é da forma $y=\frac{1}{5}x+b$.

Dado que o ponto A pertence a essa recta, as suas coordenadas têm de verificar esta equação.

Assim, temos: $3=\frac{1}{5}\times(-2)+b \Leftrightarrow b=\frac{17}{5}$. Portanto, $y=\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$ é a equação reduzida da recta AB.

Então, $D(0,\frac{17}{5})$.

Designando por E a projecção ortogonal do ponto A sobre o eixo *Oy*, temos: $A_{[AOD]} = \frac{\overline{OD}\times\overline{AE}}{2} = \frac{\frac{17}{5}\times 2}{2} = \frac{17}{5}$.

d)

O centro da circunferência é o ponto médio do segmento de recta [AB]: $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-2,3)+(5,1) = (3,4)$.

O raio desta circunferência é $r = \overline{AM} = \sqrt{(3+2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{26}$.

Como $\overline{OM} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 < r$, a origem do referencial é interior à circunferência considerada.

4.

a)

Relativamente à equação da recta *r*, para $y=0$, vem $0 = ax+b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. Logo, $A(-\frac{b}{a},0)$.

Relativamente à equação da recta *s*, para $y=0$, vem $0=-2ax+b \Leftrightarrow x = \frac{b}{2a}$. Logo, $C(\frac{b}{2a},0)$.

As rectas *r* e *s* intersectam-se em $B(0,b)$.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{OC}}{2} = \frac{\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{2a}\right)\times b}{2} = \frac{\left(\frac{2b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)\times b}{2} = \frac{3b^2}{4a}$.

b)

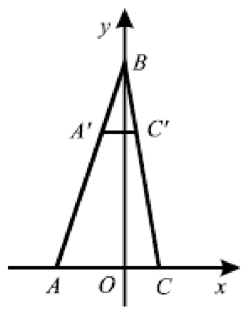
O vector dado, por as suas coordenadas serem ambas positivas, apenas pode ser paralelo ao lado [AB]. Logo, o declive da recta *r* é $m_r = a = \frac{4}{3}$.

Assim, $\begin{cases} \frac{3b^2}{4a} = 225 \\ a = \frac{4}{3} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3b^2}{\frac{16}{3}} = 225 \\ a = \frac{4}{3} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9b^2}{16} = 225 \\ a = \frac{4}{3} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{225\times 16}{9} \\ a = \frac{4}{3} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \mp\frac{15\times 4}{3} \\ a = \frac{4}{3} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 20 \end{cases}$.

Portanto, sendo $A(-15,0)$, $B(0,20)$ e $C(\frac{15}{2},0)$, vem:

$P_{[ABC]} = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC} = \sqrt{(-15)^2+20^2} + \sqrt{(\frac{15}{2})^2+20^2} + 15 + \frac{15}{2} = 25 + \frac{\sqrt{1825}}{2} + \frac{45}{2} = \frac{95}{2} + \frac{5\sqrt{73}}{2} = \frac{95+5\sqrt{73}}{2}$.

c)



Para $a=3$ e $b=9$, temos:

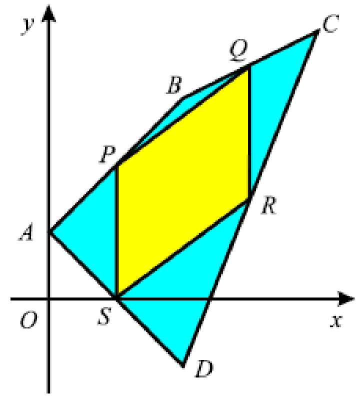
r: $y = 3x+9$, *s*: $y=-6x+9$, $A(-3,0)$, $B(0,9)$ e $C(\frac{3}{2},0)$.

Seja P o ponto de intersecção dos segmentos de recta [BO] e [A'C'].

Se a área do trapézio é $\frac{8}{9}$ da área do triângulo [ABC], então a área do triângulo [A'BC'] é $\frac{1}{9}$ da área do triângulo [ABC].

Tendo em consideração a semelhança de triângulos, temos: $\frac{\overline{BP}}{\overline{BO}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Dado que $\overline{BO} = 9$, então $\overline{BP} = 3$ e, portanto, $P(0,6)$. Como A' e C' são também pontos de ordenada 6 e pertencem, respectivamente, às rectas *r* e *s*, então $A'(-1,6)$ e $C'(\frac{1}{2},6)$.

5.



a)

Ora,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}}{2}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AD}}{2}+\frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DR}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}}\ (1)$$

e

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DA}}{2}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\overrightarrow{DC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CB}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CQ}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{RQ}}\ (2)$$

Logo, por (1) e (2), conclui-se que o quadrilátero [PQRS] tem os lados opostos paralelos (e de igual comprimento), pelo que é paralelogramo.

b)

Ora,

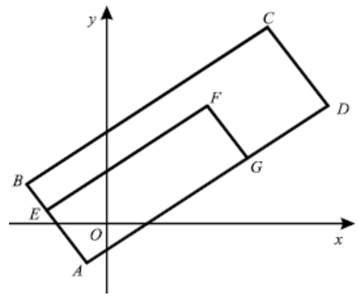
$S=P+\overrightarrow{QR}=(2,4)+\left[(6,3)-(6,7)\right]=(2,4)+(0,-4)=(2,0)$;

$B=A+2\overrightarrow{AP}=(0,2)+2\times\left[(2,4)-(0,2)\right]=(0,2)+(4,4)=(4,6)$;

$C=A+2\overrightarrow{PQ}=(0,2)+2\times\left[(6,7)-(2,4)\right]=(0,2)+(8,6)=(8,8)$;

$D=A+2\overrightarrow{AS}=(0,2)+2\times\left[(2,0)-(0,2)\right]=(0,2)+(4,-4)=(4,-2)$.

6.



a)

Ora,

$D=A+\overrightarrow{BC}=(-1,-2)+\left[(8,10)-(-4,2)\right]=(-1,-2)+(12,8)=(11,6)$;

$F=A+\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}\times\overrightarrow{AC}=(-1,-2)+\frac{10}{\sqrt{81+144}}\times(9,12)=(-1,-2)+\frac{10}{15}\times(9,12)=(5,6)$.

b)

Como o declive da recta AB é $m_{AB}=\frac{2+2}{-4+1}=-\frac{4}{3}$, então a equação reduzida da recta AB é da forma $y=-\frac{4}{3}x+b$. Dado que o ponto B pertence a essa recta, as suas coordenadas têm de verificar esta equação. Assim, temos: $2=-\frac{4}{3}\times(-4)+b \Leftrightarrow b=-\frac{10}{3}$. Portanto, $y=-\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$ é a equação reduzida da recta AB.

Como o declive da recta BC é $m_{BC}=\frac{10-2}{8+4}=\frac{2}{3}$, então a equação reduzida da recta BC é da forma $y=\frac{2}{3}x+b$. Dado que o ponto B pertence a essa recta, as suas coordenadas têm de verificar esta equação. Assim, temos: $2=\frac{2}{3}\times(-4)+b \Leftrightarrow b=\frac{14}{3}$. Portanto, $y=\frac{2}{3}x+\frac{14}{3}$ é a equação reduzida da recta BC.

Como o declive da recta AC é $m_{AC}=\frac{10+2}{8+1}=\frac{4}{3}$, então a equação reduzida da recta AC é da forma $y=\frac{4}{3}x+b$. Dado que o ponto A pertence a essa recta, as suas coordenadas têm de verificar esta equação. Assim, temos: $-2=\frac{4}{3}\times(-1)+b \Leftrightarrow b=-\frac{2}{3}$. Portanto, $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$ é a equação reduzida da recta BC.

Logo, a condição $y\geq -\frac{4}{3}x-\frac{10}{3} \ \wedge\ y\leq \frac{2}{3}x+\frac{14}{3} \ \wedge\ y\geq \frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$ define analiticamente o triângulo [ABC].

c)

Decorridos cinco minutos, o ponto que se desloca sobre a semi-recta $\dot{A}B$ ocupa a posição:

$$P_1 = A + 5 \times \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = (-1,-2) + 5 \times \frac{(-3,4)}{\sqrt{9+16}} = (-1,-2) + (-3,4) = (-4,2) \, .$$

Decorridos cinco minutos, o ponto que se desloca sobre a semi-recta $\dot{A}C$ ocupa a posição:

$$P_2 = A + 5 \times \frac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = (-1,-2) + 5 \times \frac{(9,12)}{\sqrt{81+144}} = (-1,-2) + \frac{(9,12)}{3} = (2,2) \, .$$

Como $\overline{P_1P_2} = 2 - (-4) = 6$, então, cinco minutos depois de iniciarem o seu deslocamento, os dois pontos encontram-se a uma distância de 6 cm.

7.

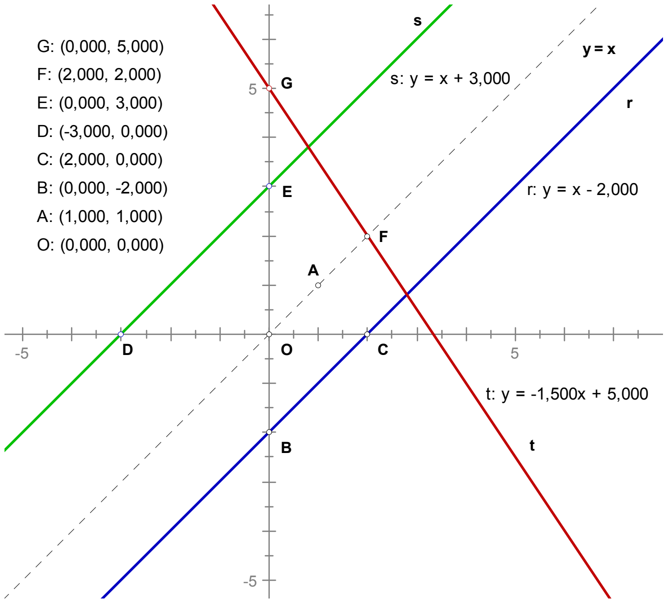
a)

As equações reduzidas das rectas desenhadas são:

r: $y = x - 2$

s: $y = x + 3$

t: $y = -\frac{3}{2}x + 5$



b)

Ora, $\begin{cases} 6-k \geq k \\ k \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k \leq 6 \\ k \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 3 \\ k \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow k \leq 3$.

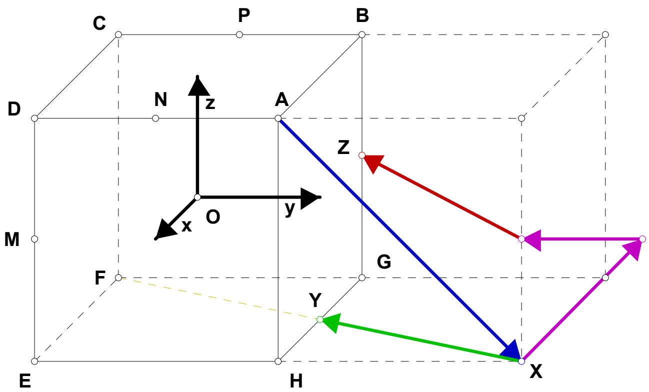
Para que o ponto de coordenadas $(k, 6-k)$ não pertença a A terá de ser $k \in \left]-\infty, 3\right]$.

8.

a)

Os pontos X, Y e Z estão representados na figura ao lado.

X é o ponto da semi-recta $\dot{E}H$ tal que $\overline{AX} = \overline{CG}$, Y é o ponto médio de [HG] e Z é o ponto médio de [BG].



b)

Se X pertence ao plano mediador do segmento de recta [BW], então $\overline{XW} = \overline{XB}$.

Como $B(-1,1,1)$ e $X(1,3,-1)$, temos:

$$\overline{XW} = \overline{XB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2 + (1+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 12$$

Esse lugar geométrico dos pontos W é a superfície esférica de centro no ponto X e que contém o ponto B.

c)

Sendo $D(1,-1,1)$ e $X(1,3,-1)$, uma equação vectorial da recta XD é $(x,y,z) = (1,-1,1) + k(0,4,-2), k \in \mathbb{R}$.
Dado que das equações vectoriais das duas rectas resulta:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + k, k \in \mathbb{R} \\ z = -1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 1 = z + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 4k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y+1}{4} = \frac{-z+1}{2} \end{cases}, \quad \text{vem:}$$

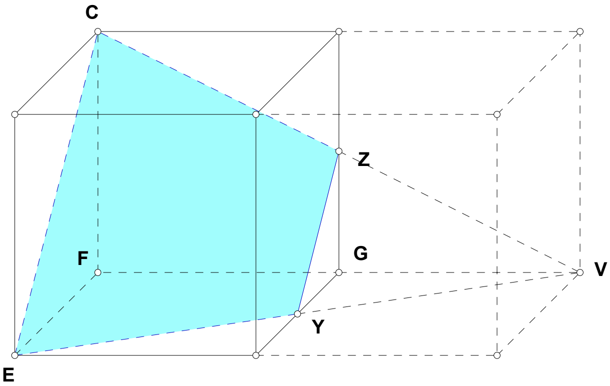
$$\begin{cases} x=1 \\ y+1=z+1 \\ \dfrac{y+1}{4}=\dfrac{-z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y+1=z+1 \\ y+1=-2z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z+1=-2z+2 \\ y+1=-2z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, o ponto de intersecção das duas rectas é o ponto de coordenadas $(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

d)

Na figura ao lado, está representada a secção produzida no cubo pelo plano EYZ.

O volume pedido é o volume de um tronco da pirâmide [CEFV]. Dado que as duas pirâmides [CEFV] e [ZYGV] são semelhantes, com razão de semelhança $r=\frac{1}{2}$, então $\frac{V_{[ZYGV]}}{V_{[CEFV]}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

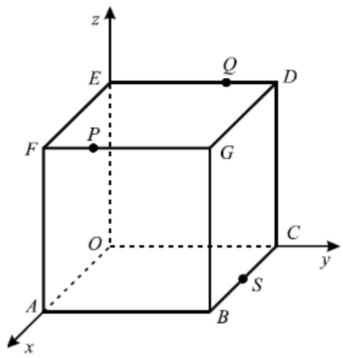


Assim, temos:

$$\begin{aligned} V_{[CEFYGZ]} &= \frac{7}{8}\times V_{[CEFV]} \\ &= \frac{7}{8}\times\frac{1}{3}\times\frac{\overline{EF}\times\overline{CF}}{2}\times\overline{FV} \\ &= \frac{7}{8}\times\frac{1}{3}\times\frac{2\times 2}{2}\times 4 \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

9.

a)



Ora, $P(10,3,10)$, $Q(0,7,10)$ e $S(5,10,0)$.

O ponto T é a intersecção da recta AB com a recta que contém o ponto S e é paralela à recta PQ.
Uma equação vectorial desta recta é $(x,y,z)=(5,10,0)+k(10,-4,0), k\in\mathbb{R}$,

donde $\begin{cases} x=5+10k \\ y=10-4k, k\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-5}{10}=\dfrac{-y+10}{4} \\ z=0 \end{cases}$.

A recta AB pode ser definida por $x=10\wedge z=0$.
Assim, vem:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{10}=\dfrac{-y+10}{4} \\ z=0 \\ x=10\wedge z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ z=0 \\ \dfrac{-y+10}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ z=0 \\ y=8 \end{cases}.$$

Logo, $T(10,8,0)$.

O ponto R é a intersecção da recta CD com a recta que contém o ponto Q e é paralela à recta PT.
Uma equação vectorial desta recta é $(x,y,z)=(0,7,10)+k(0,5,-10), k\in\mathbb{R}$,

donde $\begin{cases} x=0 \\ y=7+5k \quad, k\in\mathbb{R} \\ z=10-10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y-7}{5}=\dfrac{-z+10}{10} \end{cases}$.

A recta CD pode ser definida por $x=0\wedge y=10$.
Assim, vem:

$$\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y-7}{5}=\dfrac{-z+10}{10} \\ x=0\wedge y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=10 \\ \dfrac{-z+10}{10}=\dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=10 \\ z=4 \end{cases}.$$

Logo, $R(0,10,4)$.

b)

Uma equação vectorial da recta PQ é $(x,y,z)=(0,7,10)+k(10,-4,0), k\in\mathbb{R}$,

donde $\begin{cases} x=10k \\ y=7-4k, k\in\mathbb{R} \\ z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{10}=\dfrac{-y+7}{4} \\ z=10 \end{cases}$.

O plano xOz pode ser definido por $y=0$.

Assim, vem:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{10}=\dfrac{-y+7}{4} \\ z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ \dfrac{x}{10}=\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{35}{2} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}. \qquad \text{Logo, } I(\frac{35}{2},0,0).$$

Assim, $A_{[EIC]}=\dfrac{\overline{EI}\times\overline{EC}}{2}=\dfrac{\frac{35}{2}\times10\sqrt{2}}{2}=\dfrac{175\sqrt{2}}{2}$.

<u>Alternativa para a determinação das coordenadas do ponto I</u>:

As coordenadas do ponto I são da forma $I(x,0,0)$.
Considerando a semelhança dos triângulos [QEI] e [PFI], temos:

$\dfrac{\overline{QE}}{\overline{PF}}=\dfrac{\overline{EI}}{\overline{FI}} \Leftrightarrow \dfrac{7}{3}=\dfrac{10+a}{a} \Leftrightarrow 7a=30+3a \Leftrightarrow a=\dfrac{15}{2}$. Logo, $I(10+\frac{15}{2},0,0)=(\frac{35}{2},0,0)$.

10.

a)

Ora,

$D=A+\overrightarrow{BC}=(14,-7,4)+\left[(10,-6,13)-(16,-4,10)\right]=(14,-7,4)+(-6,-2,3)=(8,-9,7)$;

$F=B+\overrightarrow{AE}=(16,-4,10)+\left[(8,5,0)-(14,-7,4)\right]=(16,-4,10)+(-6,12,-4)=(10,8,6)$;

$G=C+\overrightarrow{AE}=(10,-6,13)+\left[(8,5,0)-(14,-7,4)\right]=(10,-6,13)+(-6,12,-4)=(4,6,9)$;

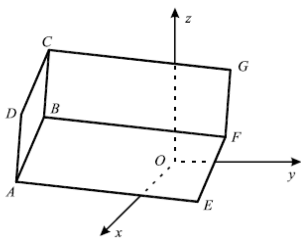
$H=D+\overrightarrow{AE}=(8,-9,7)+\left[(8,5,0)-(14,-7,4)\right]=(8,-9,7)+(-6,12,-4)=(2,3,3)$.

b)

$V=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BF}\right\|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}\times\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+3^2}\times\sqrt{(-6)^2+12^2+(-4)^2}=7\times7\times14=686$.

c)

A condição $(x,y,z)=(14,-7,4)+k(2,3,6), k\in[0,1]$ define a aresta [AB].



d)

Como o prisma é regular, o centro dessa superfície esférica é o ponto de intersecção das suas diagonais espaciais, que se bissectam:

$M_{[CE]}(\frac{10+8}{2},\frac{-6+5}{2},\frac{13+0}{2})=(9,-\frac{1}{2},\frac{13}{2})$.

O raio da superfície esférica é $r=\dfrac{\overline{CE}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(10-8)^2+(-6-5)^2+(13-0)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{294}=\sqrt{\dfrac{147}{2}}$.

Portanto, a condição $(x-9)^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{13}{2})^2=\frac{147}{2}$ define essa superfície esférica.

e)

A secção produzida no prisma pelo plano ABG é o rectângulo [ABGH], logo a sua área é:

$A_{[ABGH]}=\overline{AB}\times\overline{BG}=7\times\sqrt{(4-16)^2+(6+4)^2+(9-10)^2}=7\times\sqrt{245}=7\times7\times\sqrt{5}=49\sqrt{5}$.

f)

O plano DBF é o plano mediador do segmento [AC], isto é, o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ equidistantes de $A(14, -7, 4)$ e $C(10, -6, 13)$.

Assim, vem:

$$
\begin{aligned}
\overline{PA} = \overline{PC} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-14)^2 + (y+7)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + (y+6)^2 + (z-13)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cancel{x^2} - 28x + 196 + \cancel{y^2} + 14y + 49 + \cancel{z^2} - 8z + 16 = \cancel{x^2} - 20x + 100 + \cancel{y^2} + 12y + 36 + \cancel{z^2} - 26z + 169 \\
&\Leftrightarrow \quad -8x + 2y + 18z = 44 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x - y - 9z = -22
\end{aligned}
$$

Portanto, $4x - y - 9z = -22$ é uma equação do plano DBF.

FIM