Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho de Matemática A

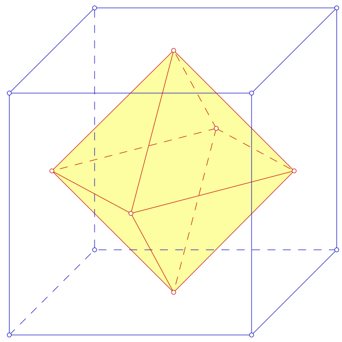
Ano Lectivo 2009/10 **Sólidos Platónicos – Duais, Áreas e Volumes** **10.º Ano**

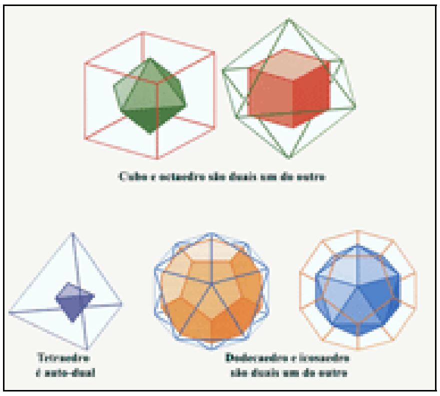
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

Sólidos Platónicos – Duais, Áreas e Volumes

1.

O sólido dual do cubo é o octaedro regular.





2.

O dual do tetraedro é o tetraedro.

O dual do octaedro é o cubo.

a)

POLIEDROS	n.º de lados por face	n.º de faces	n.º de vértices	n.º de arestas	n.º de arestas por vértice	
	Lf	F	V	A	Av	
	3	4	4	6	3	
	4	6	8	12	3	
	3	8	6	12	4	
	5	12	20	30	3	
	3	20	12	30	5	
	n.º de arestas por vértice	n.º de vértices	n.º de faces	n.º de arestas	n.º de lados por face	DUAIS
	Av	V	F	A	Lf	

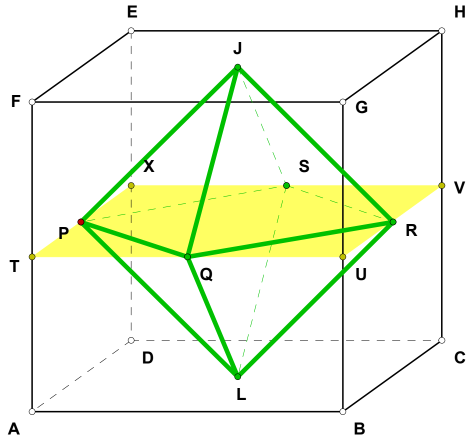
b)

Entre um poliedro regular convexo e o respectivo dual, verifica-se:

- O número de arestas (A) permanece invariante; (A ↔ A)
- O número de vértices (V) de um é igual ao número de faces (F) do outro e reciprocamente; (V ↔ F)
- O número de lados por face (Lf) de um é igual ao número de arestas por vértice do outro (Av) e reciprocamente. (Lf ↔ Av)

3.

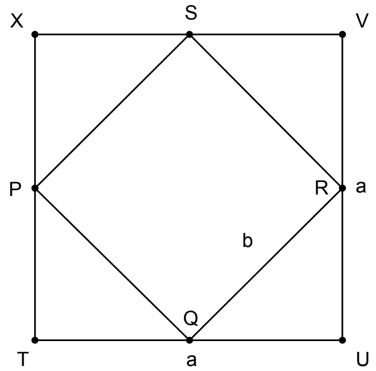
a)



Consideremos o plano PQR, que determina como secções os quadriláteros [TUVX] e [PQRS], respectivamente no cubo e no octaedro. Essas secções estão representadas na figura abaixo.

Como o plano seccionador é paralelo às bases do cubo e contém os centros das faces laterais, então a secção é um quadrado, cujos pontos médios dos seus lados, respectivamente os pontos P, Q, R e S, são 4 vértices do octaedro e, simultaneamente, os vértices da secção neste.

Dado que os quatro triângulos são rectângulos, isósceles e geometricamente iguais, então as suas hipotenusas são geometricamente iguais. Assim, o quadrilátero [PQRS] tem os seus quatro lados geometricamente iguais.



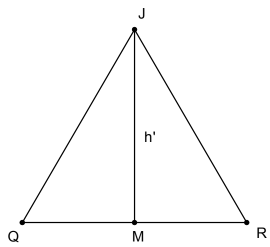
Por outro lado, sendo rectângulo e isósceles cada um dos triângulos considerados, então a amplitude dos seus ângulos agudos é de 45º. O que implica que cada um dos ângulos internos do quadrilátero [PQRS] seja recto.

Desta forma, conclui-se que o quadrilátero [PQRS] é um quadrado, pois possui os ângulos internos rectos e os seus lados são geometricamente iguais.

Designado por <u>*b*</u> o comprimento da aresta do octaedro e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [QUR], temos:

$b = \overline{RQ} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

Do corte do octaedro pelo plano PQR resultam duas pirâmides quadrangulares regulares, geometricamente iguais.
Assim, temos:



$$\begin{aligned} V_{Octaedro} &= 2 \times V_{[PQRSJ]} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \underbrace{\left(2\sqrt{2}\right)^2}_{A_b} \times \underbrace{\frac{4}{2}}_{h} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times (4 \times 2) \times 2 \\ &= \frac{32}{3} \quad cm^3 \end{aligned}$$

<u>Repare que</u>: $\frac{V_{Octaedro}}{V_{Cubo}} = \frac{\frac{32}{3}}{64} = \frac{32}{3 \times 64} = \frac{1}{6}$, isto é, $\boxed{V_{Octaedro} = \frac{V_{Cubo}}{6} = \frac{1}{6} V_{Cubo}}$.

Consideremos uma das 8 faces geometricamente iguais do octaedro, por exemplo o triângulo equilátero [QRJ]. Determinemos a sua altura [JM] (de comprimento h'), relativamente à base [RQ], que divide este triângulo em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais.
Aplicando o Teorema de Pitágoras num destes triângulos rectângulos, vem:

$h' = \overline{JM} = \sqrt{\overline{JR}^2 - \overline{MR}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 \times 2 - 2} = \sqrt{6}$ cm.

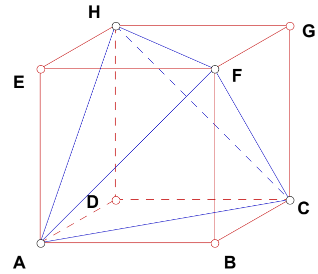
Assim, a área do octaedro é:

$$\begin{aligned} A_{Octaedro} &= 8 \times A_{[QRJ]} \\ &= 8 \times \frac{\overbrace{2\sqrt{2}}^{B} \times \overbrace{\sqrt{6}}^{h'}}{2} = 8 \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} = 8 \times \sqrt{12} = 8 \times \sqrt{4 \times 3} = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \quad cm^2 \end{aligned}$$

b) Como sabemos, dadas duas figuras tridimensionais semelhantes de razão *r*:

- A razão entre os comprimentos correspondentes é $\frac{C'}{C} = r$;
- A razão entre as áreas correspondentes é $\frac{A'}{A} = r^2$;
- A razão entre os volumes correspondentes é $\frac{V'}{V} = r^3$.

Assim, como $r=2$, virá $A' = 2^2 \times 16\sqrt{3} = 64\sqrt{3}\ cm^2$ e $V' = 2^3 \times \frac{32}{3} = \frac{256}{3}\ cm^3$.



4.

a)

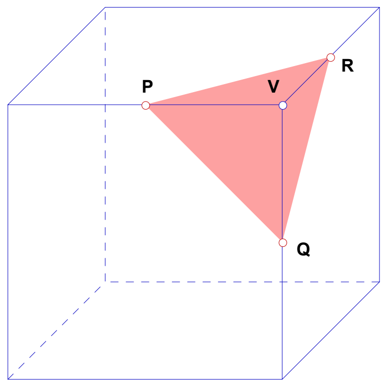
As seis arestas do poliedro são geometricamente iguais, pois são diagonais faciais do cubo. Desta forma, as quatro faces do poliedro são triângulos equiláteros (portanto, polígonos regulares) geometricamente iguais. Também, em cada um dos quatro vértices do poliedro concorrem igual número de arestas: 3.
Por isso, trata-se de um tetraedro regular.

b)

Atendendo à decomposição do cubo sugerida, vem:

$$\begin{aligned} V_{Tetraedro} &= V_{Cubo} - 4 \times V_{Pirâmide} \\ &= 10^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{\overline{AE} \times \overline{EF}}{2}}_{A_b} \times \underbrace{\overline{EH}}_{h} = 10^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 10}{2} \times 10 = 1000 - \frac{2000}{3} = \frac{1000}{3} \quad cm^3 . \end{aligned}$$

<u>Repare que</u>: $\frac{V_{Tetraedro}}{V_{Cubo}} = \frac{\frac{1000}{3}}{1000} = \frac{1}{3}$, isto é, $\boxed{V_{Tetraedro} = \frac{V_{Cubo}}{3} = \frac{1}{3} V_{Cubo}}$.



5.

a)

A secção é um triângulo equilátero, sendo o comprimento do seu lado
$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PV}^2 + \overline{QV}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ cm.
Assim, a secção produzida tem de perímetro $P = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

Designando por h' a altura do triângulo equilátero [PQR], temos:
$$h' = \sqrt{\overline{QR}^2 - \left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 \times 2 - 2} = \sqrt{6} \text{ cm.}$$
Assim, a secção produzida tem de área
$$A = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

b)

$$V = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{\overline{PV} \times \overline{QV}}{2}}_{A_b} \times \underbrace{\overline{VR}}_{h} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 2 = \frac{4}{3} \quad cm^3 .$$

c) A investigar no Clube de Matemática: [outras secções no cubo](http://www.prof2000.pt/users/amma/ce/matB/mod_i/Sec_cub_todas.htm).
(http://www.prof2000.pt/users/amma/ce/matB/mod_i/Sec_cub_todas.htm)