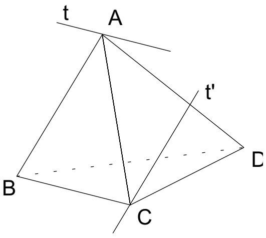
# Escola Secundária da Sé-Lamego

## Ficha de Trabalho de Matemática

**Ano Lectivo 2002/03** ***Intersecção de sólidos por um plano dado*** **10.º Ano**

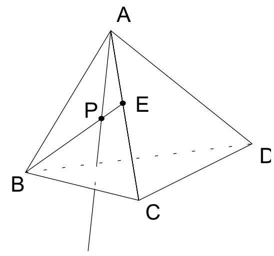
Nome:_________________________________________________________ N.º:___ Turma: ___

***Observe atentamente as figuras e, sempre que possível e necessário, construa os modelos representados para encontrar com mais facilidade as respostas às perguntas formuladas. Em cada caso tente fazer uma breve descrição do modo como procedeu e da sequência de raciocínio que o conduziram às diversas respostas.***



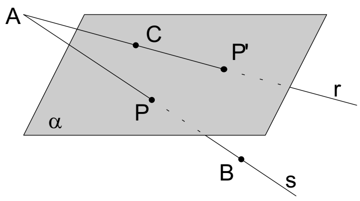

**1.** Na figura ao lado está representado um tetraedro e duas rectas, t e t'.
A recta t é paralela à recta BC e contém o ponto A.
A t' é paralela à recta AB e contém o ponto C.
Qual é a posição relativa das rectas t e t'?

**Sugestão:** *Duas rectas paralelas definem um plano.*



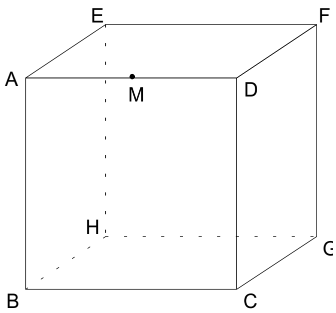

**2.** Considerando as indicações da perspectiva cavaleira, identifique o erro que se cometeu ao representar a figura.

$\{P\} = AP \cap BE$ e $E \in AC$ .




**3.** Na figura, as rectas r e s intersectam-se no ponto A e intersectam o plano $\alpha$ , respectivamente, nos pontos P e P'.

Desenhe a recta CB, respeitando as indicações da perspectiva cavaleira.




**4.** Considere o cubo [ABCDEFGH], sabendo que M é um ponto da aresta [AD].

**a)** Desenhe a secção produzida no cubo pelo plano EGM.

**b)** Calcule o perímetro da secção sabendo que $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ e a aresta do cubo tem 2 cm de comprimento.

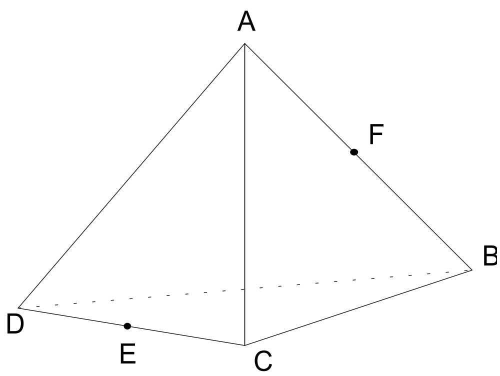
**5.** Observe a figura seguinte que representa um tetraedro [ABCD] e E e F são dois pontos de duas das suas arestas.

**a)** As rectas BC e EF são complanares? Justifique.

**b)** Indique dois planos secantes definidos por pontos da figura e a respectiva recta de intersecção.

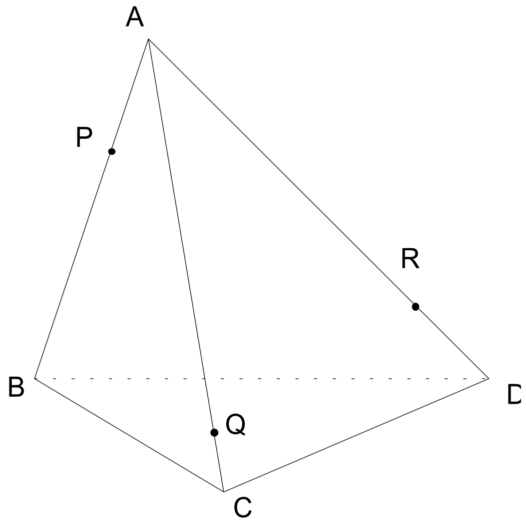
**c)** Os pontos A, B, C e D quantos planos definem?

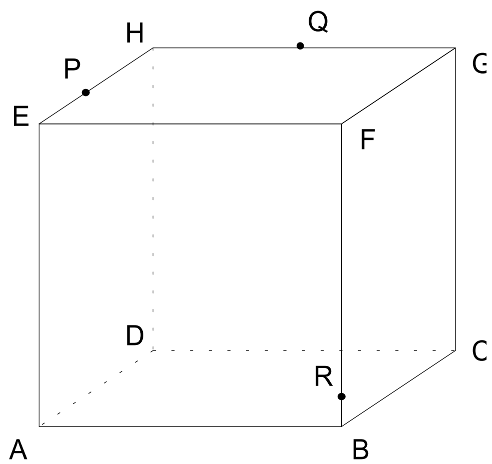
**d)** Desenhe a secção do tetraedro produzida por um plano paralelo ao plano BCD e que contenha o ponto F.



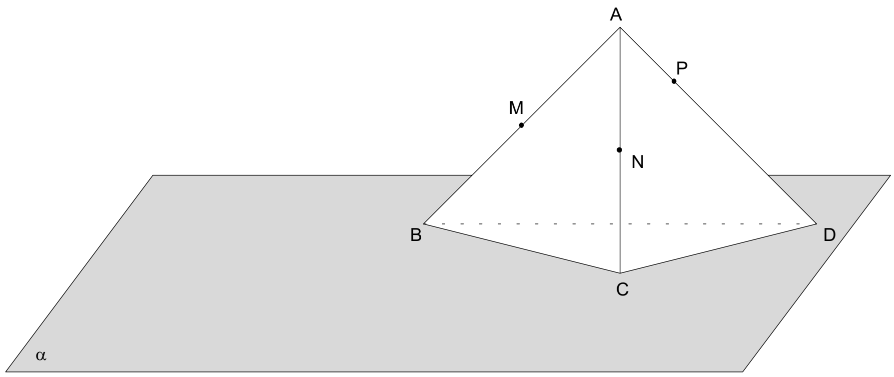
**6.** Por um ponto P traçam-se duas rectas, *r* e *s*, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, sendo *t* uma terceira recta.
Qual a posição do plano definido pelas rectas *r* e *s* em relação a *t*?

**7.** Trace, em cada um dos casos, a intersecção do plano PQR com as faces dos sólidos seguintes:




**8.** O tetraedro regular da figura tem a base [BCD] contida no plano $\alpha$ . Os pontos M e N são os pontos médios, respectivamente, das arestas [AB] e [AC]; $P \in [AD]$ e P não é o ponto médio de [AD].




**a)** Mostre que BC é paralela ao plano MNP.

**b)** Justifique que é verdadeira a afirmação: "PN e CD intersectam-se num ponto de $\alpha$ ."

**c)** Quantos planos há paralelos ao plano MNP e passando por BC? (Porque razão $\alpha$ não pode ser paralelo ao plano MNP?)

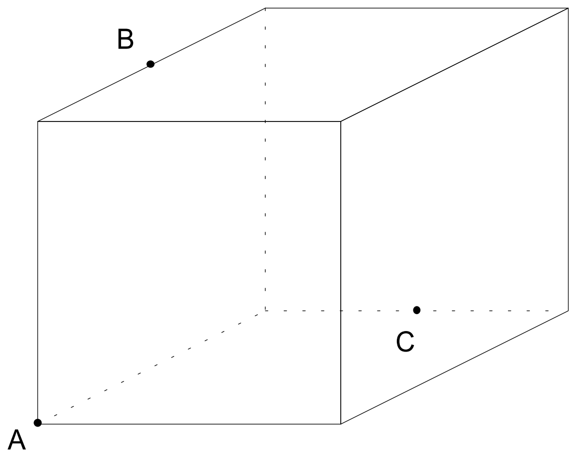
**d)** Desenhe a recta de intersecção do plano MNP com o plano BCD.

**9.** Um recipiente cúbico de aresta 6 dm está furado em três pontos (um vértice e dois pontos médios de duas arestas) como mostra a figura.
Poder-se-ão deitar no recipiente 180 litros de líquido sem perigo da cuba pingar?

**Sugestão:** *A capacidade do recipiente furado será máxima quando o plano ABC for horizontal e o sólido de maior volume ficar por baixo deste plano.*

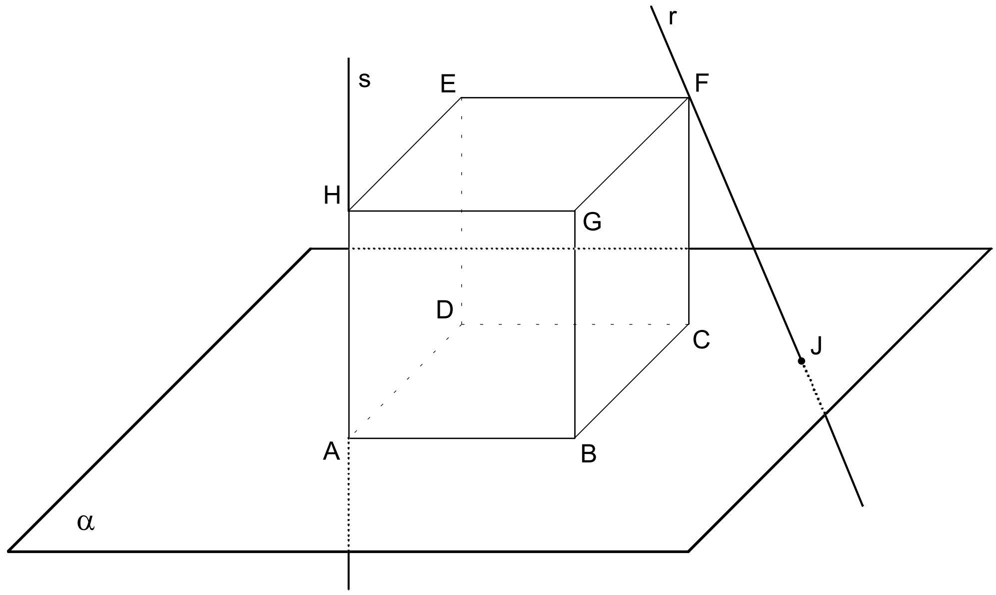
*Determine a secção obtida no cubo por esse plano e comprove que poderá considerar um conjunto de três sólidos: o cubo e duas pirâmides.*

*Relacione os seus volumes e conclua (qual é a razão de semelhança entre as duas pirâmides?).*



**10.** Um cubo [ABCDEFGH] está "assente" no plano $\alpha$.

- A recta r contém o ponto F e intersecta o plano $\alpha$ no ponto J;
- $A \in s$ e $H \in s$.




**a)** Indique dois planos dos quais s é a intersecção.

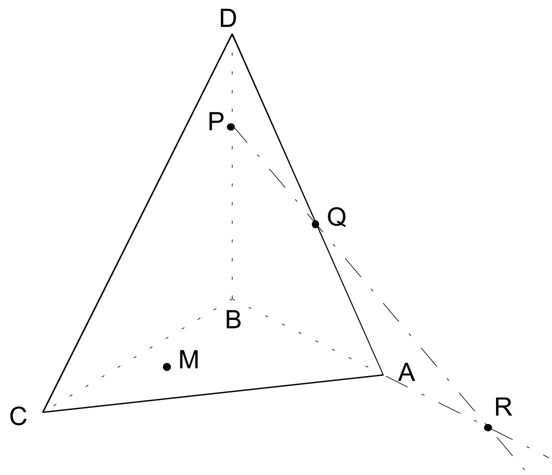
**b)** Indique 3 pontos do plano mediador de [AC].

**c)** Qual é a posição relativa das rectas s e JB? Justifique.

**d)** Mostre que a intersecção dos planos $\alpha$ e AFJ é a recta JA.
Desenhe essa recta, respeitando as indicações da perspectiva cavaleira.

**e)** Determine a secção plana que se obtém ao seccionar o cubo pelo plano AFJ.
Justifique, de forma muito sucinta, as construções efectuadas.

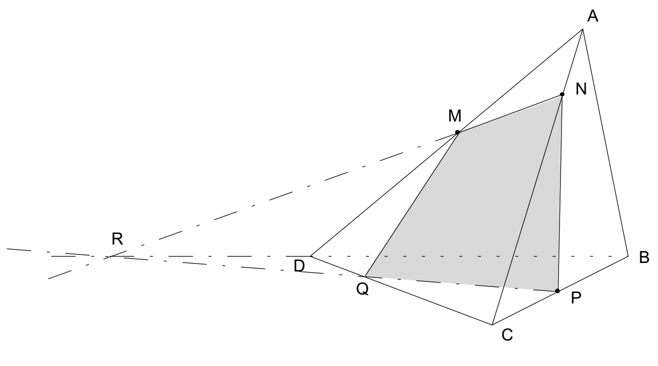
**11.** A figura ao lado representa um tetraedro. Os pontos P e Q são pontos das arestas [BD] e [DA], respectivamente. As rectas PQ e BA intersectam-se em R.

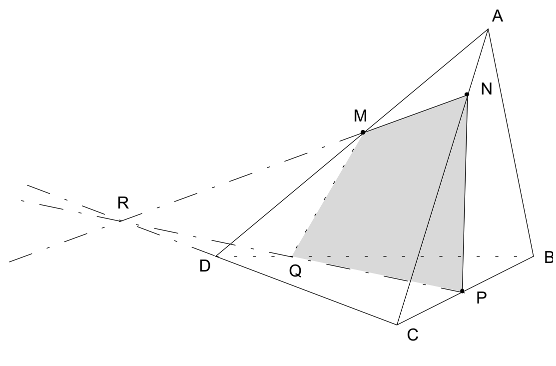



**a)** Justifique que a intersecção dos planos CPQ e ABC é a recta CR.

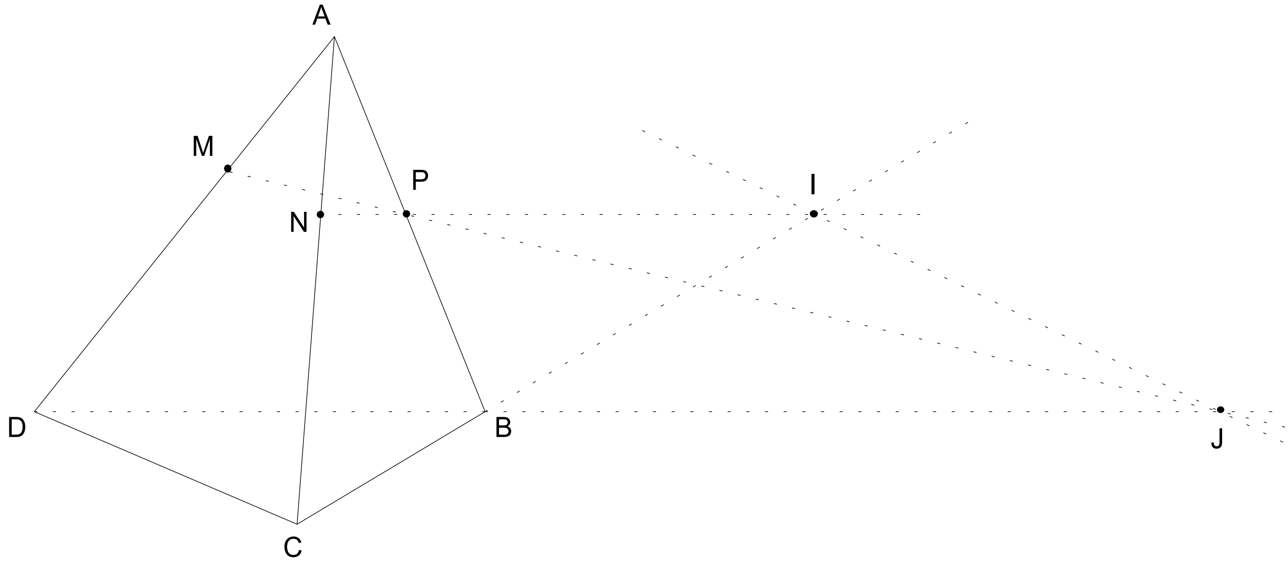
**b)** Determine a secção plana que se obtém ao seccionar o tetraedro pelo plano MPQ, sendo $M \in [ABC]$. Justifique de forma sucinta as construções que efectuou.

**12.** M é um ponto de [AD], N é um ponto de [AC] e P um ponto de [BC].
Pretende-se determinar a intersecção do plano MNP com o tetraedro.
Eis duas figuras. O que pensa delas?



**13.** M é um ponto de [AD], N um ponto de [AC] e P um ponto de [AB], distintos dos vértices do tetraedro.
Eis uma figura. Observe-a.

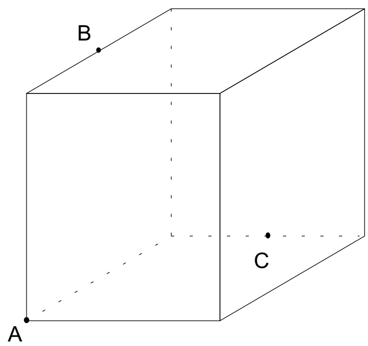



**a)** A que questão responde?

**b)** Redija a demonstração.

**c)** As rectas MN e DC intersectam-se em K. Que pode dizer dos pontos I, J,K?

**14.** O cubo [ABCDEFGH] tem por aresta *a* e os pontos I e J são centros de faces.




**a)** Calcule o comprimento de [IJ], em função de *a*.

**b)** Calcule o comprimento de [AI] e o comprimento de [AJ], em função de *a*.

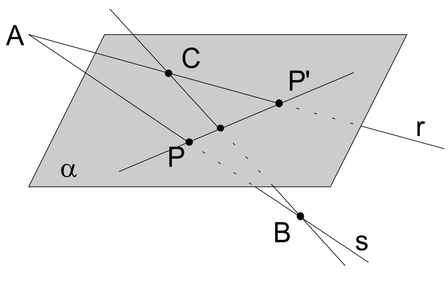
**c)** Determine a secção feita no cubo pelo plano AIJ.

**Sugestão:** *Recorra a um cubo auxiliar justaposto ao dado pela face [BCGF] e repare que [AJ] é metade da diagonal do paralelepípedo obtido.*

## SOLUÇÕES

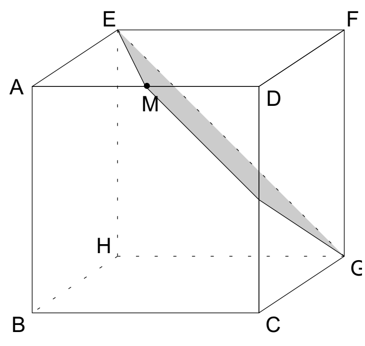
**1.** Sabemos que duas rectas paralelas definem um plano.
As rectas t e BC são paralelas, portanto definem um plano. Este plano é o plano da face [ABC] do tetraedro. A recta t' é paralela a AB, logo estas rectas definem um plano. Este plano é o plano da face [ABC] do tetraedro.
Logo as rectas t e t' são complanares e concorrentes.

**2.** A recta AP pertence ao plano da face [ABC] do tetraedro. Como a face é visível, a recta deve ser representada a cheio.




**3.**

**4.**

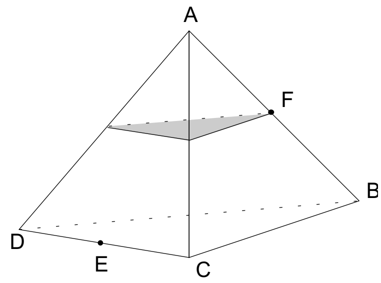



**a)**

**b)** $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ cm.

**5.**

**a)** O plano definido pela recta BC e pelo ponto F é o plano da face [ABC] do tetraedro. O plano definido pela recta BC e pelo ponto E é o plano da face [BCD] do tetraedro. Como as faces não pertencem ao mesmo plano, as rectas BC e EF não são complanares.



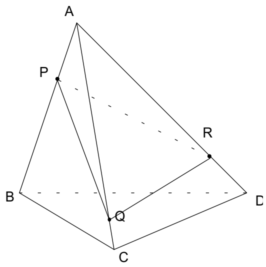

**b)** Por exemplo: os planos ABD e BCD são secantes e a recta de intersecção é a recta BD.

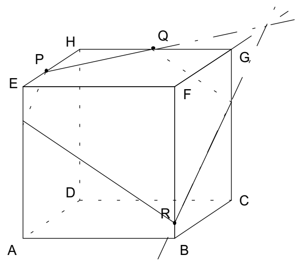
**c)** Quatro planos: os planos que contêm as 4 faces do tetraedro.

**d)**

**6.** A recta *t* é perpendicular ao plano definido pelas rectas *r* e *s*, pois é perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano.

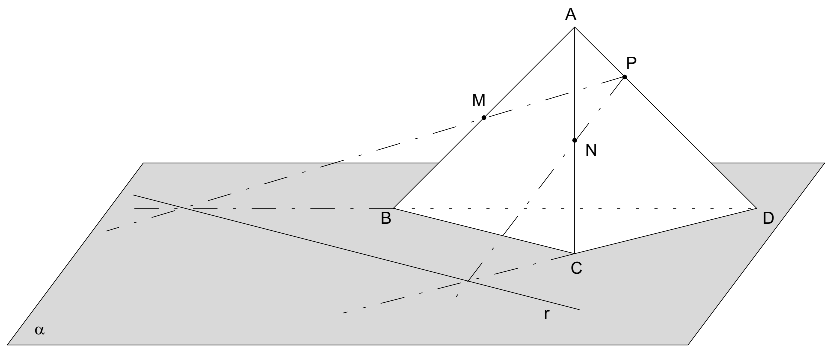
**7.**




**8.**

**a)** Sendo o tetraedro regular, se M e N são os pontos médios das arestas a que pertencem, vem MN//BC. Logo, como no plano MNP existe uma recta paralela à recta BC, o plano MNP é paralelo a esta recta.

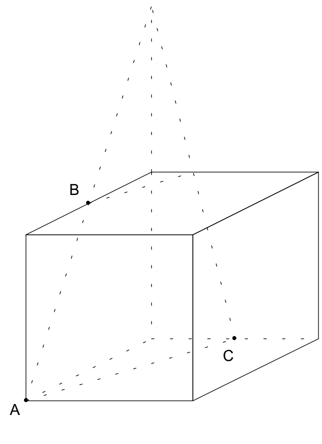



**b)** PN e CD são rectas complanares e concorrentes, então intersectam-se num ponto que pertence a CD e a $\alpha$, pois CD$\in \alpha$ (CD é a intersecção dos planos ACD e $\alpha$).

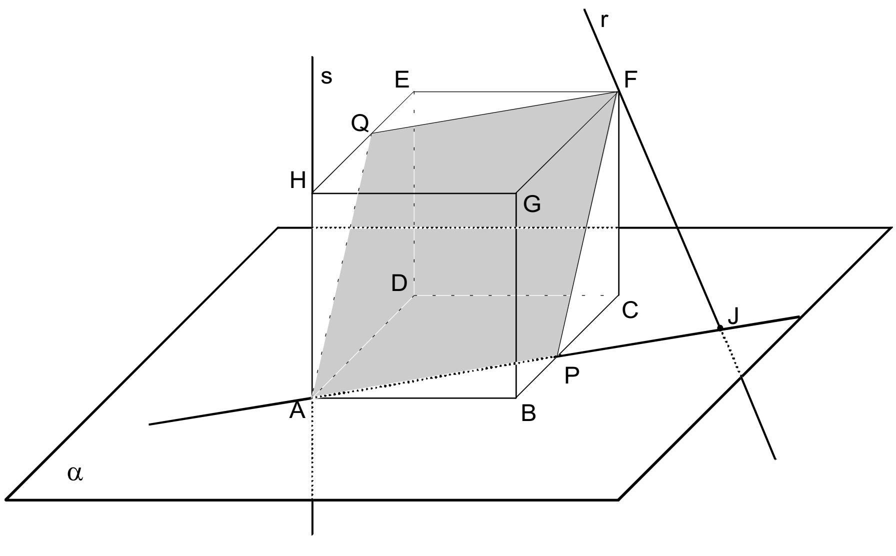
**c)** Um plano.
Se $\alpha$ e MNP têm um ponto comum (PN intersecta $\alpha$), então não podem ser paralelos.

**d)** A recta de intersecção é r (ver figura).

**9.** É possível deitar 180 litros neste recipiente (teoricamente) nas condições dadas visto a sua capacidade máxima ser de 184,5 litros.
(Volume da pirâmide maior: 36 litros; Volume da pirâmide menor: 4,5 litros)




**10.**




**a)** A recta s é, por exemplo, a intersecção dos planos AHG e AHE.

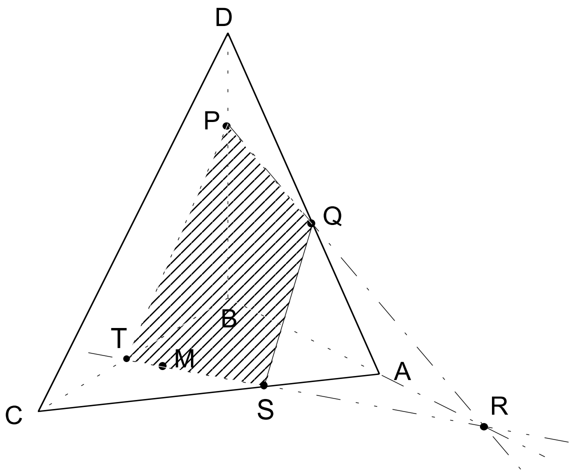
**b)** B, D e G são 3 pontos do plano mediador de [AC].

**c)** A recta s é perpendicular ao plano α, logo é perpendicular a todas as rectas de α. Como JB é uma recta desse plano, então s é perpendicular a JB.

**d)** O ponto A é ponto comum aos planos $\alpha$ e AFJ; o ponto J é também ponto comum aos mesmos planos. Como A e J são distintos e simultaneamente comuns aos planos $\alpha$ e AFJ, então a recta JA é a intersecção desses planos.

**e)** Da alínea anterior, conclui-se que [AP] é a intersecção do plano seccionador com a face [ABCD] do cubo.
A secção na face [BCFG] é o segmento [PF], pois F é comum a essa face e ao plano seccionador.
Como um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas, as secções nas outras duas faces são os segmentos [FQ] e [QA], sendo [FQ] // [PA] e [QA] // [FP].
A secção plana que se obtém ao seccionar o cubo pelo plano AFJ é o paralelogramo [APFQ].

**11.**




**a)** O ponto R pertence simultaneamente aos planos CPQ e ABC, pois é a intersecção das rectas PQ, pertencente ao plano CPQ, e BA, que é uma recta do plano ABC. O ponto C é um ponto do plano CPQ e também um ponto do plano ABC. Deste modo, os pontos R e C, distintos e simultaneamente pertencentes a esses dois planos, definem a recta CR que é a intersecção dos planos CPQ e ABC.

**b)** Por raciocínio análogo ao da alínea anterior, conclui-se que a recta RM é a intersecção dos planos MPQ e ABC (Note que M pertence simultaneamente aos planos MPQ e ABC). Esta recta, RM, intersecta as arestas [AC] e [BC] nos pontos S e T, respectivamente. Deste modo, o quadrilátero [PQST] é a secção plana que se obtém ao seccionar o tetraedro pelo plano MPQ.

**12.** A construção na figura da esquerda está errada. A construção na figura da direita está correcta.

**13.**

**a)** A construção corresponde à determinação da intersecção dos planos MNP e BCD (recta IJ).

**b)** As rectas MP e DB do plano ADB intersectam-se no ponto J. Logo, J é ponto comum dos planos MNP e BCD, pois as rectas referidas são uma de cada um dos referidos planos.
As rectas NP e BC do plano ABC intersectam-se no ponto I. Logo, I é ponto comum dos planos MNP e BCD, pois as rectas referidas são uma de cada um dos referidos planos.
Assim, a recta IJ é a recta de intersecção dos planos MNP e BCD.

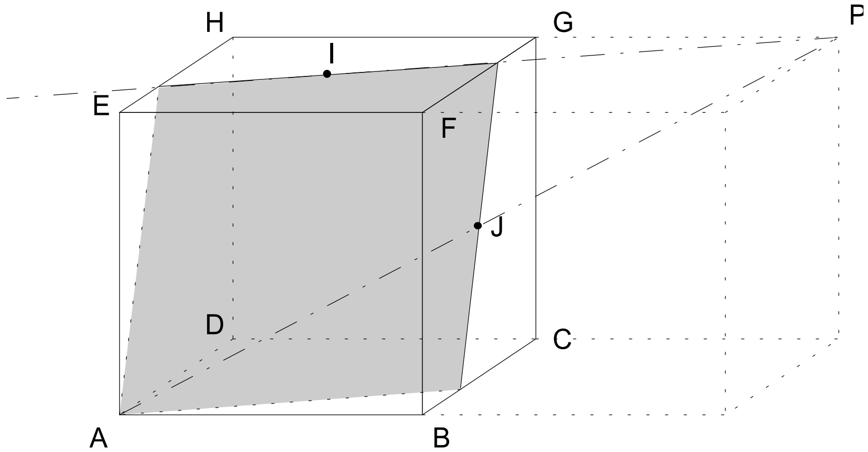
**c)** Os pontos IJK são colineares, pois K é também um ponto comum dos planos MNP e BCD.

**14.**

**a)** $\overline{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

**b)** $\overline{AI} = \overline{AJ} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

**c)**




*O Professor*