

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

6/10/97

Conjunto R - Operações com radicais, racionalização de denominadores e enquadramentos

10.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

NÚMEROS IRRACIONAIS

Números irracionais são números que não é possível representar na forma de fracção, isto é, que não podem ser escritos como razão de dois números inteiros.

As dízimas dos números irracionais são sempre infinitas não periódicas.

O conjunto dos números reais, R, compreende os números racionais e irracionais.

As dízimas finitas e as dízimas infinitas periódicas representam sempre números racionais.

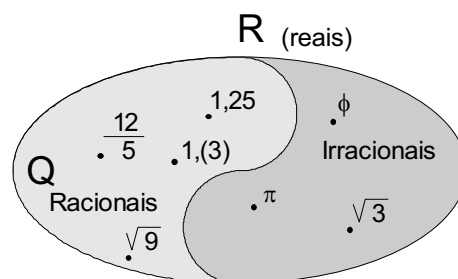
Por exemplo, determinemos a fracção correspondente ao número racional 3,(14):

Designando 3,(14) por x , temos:

$$\begin{array}{r} 100x = 314,(14) \\ x = 3,(14) \\ \hline 99x = 311,(00) \end{array}$$

subtraindo ordenadamente, vem:

$$\text{Logo, } x = \frac{311}{99}.$$



Um irracional famoso

π

Talvez o mais famoso número irracional seja o PI (π), o quociente entre o perímetro e o diâmetro de um círculo. As calculadoras científicas têm uma tecla para acesso directo a um valor aproximado de π com dez, ou mais, dígitos. Por vezes, quando se calcula o perímetro ou uma área de um círculo utiliza-se 3,14 como valor aproximado de π , mas actualmente ele já foi calculado com milhões de casas decimais.

OPERAÇÕES COM RADICAIS

Em certas situações particulares é possível operar com raízes quadradas, raízes cúbicas,

Radicais equivalentes

A propriedade seguinte tem duas aplicações: simplificação de radicais e redução de radicais ao mesmo índice.

Para todo o número real positivo x e para $n, m, p \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \times p]{x^{m \times p}}$$

Exemplos

$$\begin{aligned} \sqrt[10]{2^5} &= \sqrt[10 \div 5]{2^{5 \div 5}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{64} &= \sqrt[3 \div 3]{2^6} \\ &= \sqrt{2^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Escrever, por ordem crescente, $\sqrt[4]{4}$ e $\sqrt[3]{3}$.

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4 \times 3]{4^3} = \sqrt[12]{64} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[3 \times 4]{3^4} = \sqrt[12]{81}.$$

Logo, $\sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$.

Adição e subtracção de radicais

É possível traduzir a soma e a diferença de radicais por um único radical quando tiverem o mesmo índice e o mesmo radicando.

Para todo o número real positivo x e para $n \in \mathbb{N}$,

$$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a + b)\sqrt[n]{x}$$

Exemplos

$$\begin{array}{l} \sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (1+4)\sqrt{5} \\ = 5\sqrt{5} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 2\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = (2+7)\sqrt{5} + (3-4)\sqrt{3} \\ = 12\sqrt{5} - \sqrt{3} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[5]{2} - 7\sqrt[5]{2} + 3\sqrt[3]{6} = (4+3)\sqrt[3]{6} + (2-7)\sqrt[5]{2} \\ = 7\sqrt[3]{6} - 5\sqrt[5]{2} \end{array}$$

Multiplicação de radicais

O produto de dois radicais com o mesmo índice, é um radical ainda com o mesmo índice, cujo radicando é o produto dos radicandos.

Para todos os números reais positivos x e y e para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

Exemplos

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5 \times 3} \\ = \sqrt[3]{15} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{7} = (3 \times 4) \times \sqrt{2 \times 7} \\ = 12\sqrt{14} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4\sqrt[5]{3} \times 2\sqrt[5]{2} - 7\sqrt[3]{2} \times 3\sqrt[3]{6} = (4 \times 2)\sqrt[5]{3 \times 2} - (7 \times 3)\sqrt[3]{2 \times 6} \\ = 8\sqrt[5]{6} - 21\sqrt[3]{12} \end{array}$$

Divisão de radicais

O quociente de dois radicais com o mesmo índice, é um radical ainda com o mesmo índice, cujo radicando é o quociente dos radicandos.

Para todos os números reais positivos x e y e para $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Exemplos

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{5} \div \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5 \div 3} \\ = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{8\sqrt{12}}{4\sqrt{6}} = \frac{8}{4} \sqrt{\frac{12}{6}} \\ = 2\sqrt{2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{6 \times 5}{3}} \\ = \frac{1}{3} \times \sqrt{10} \end{array}$$

Passar um factor para dentro ou para fora do radical

Pode sempre escrever-se o produto de um número racional por um radical sob a forma de um radical, bastando para isso escrever o número racional na forma de radical e, em seguida, multiplicar os dois radicais.

Para todo o número racional x e real y positivos e para $n \in \mathbb{N}$,

$$x \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \times y}$$

Exemplos

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \\ = \sqrt{45} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{7} \\ = \sqrt[3]{56} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} \\ = \sqrt{4} \times \sqrt{3} \\ = 2\sqrt{3} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} \\ = 2\sqrt[3]{3} \end{array}$$

Potência de um radical

A potência de um radical é um radical ainda com o mesmo índice, cujo radicando é a potência do radicando.

Para todo o número real positivo x e para $n, p \in \mathbb{N}$,

$$(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$$

Exemplos

$$\begin{array}{l} (\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3} \\ = \sqrt{5^2 \times 5} \\ = 5\sqrt{5} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\sqrt[3]{7})^4 = \sqrt[3]{7^4} \\ = 7\sqrt[3]{7} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 \\ = 3 + 2\sqrt{21} + 7 \\ = 10 + 2\sqrt{21} \end{array}$$

Radical de um radical

O radical de um radical é outro radical cujo índice é o produto dos índices e o radicando é o mesmo número.

Para todo o número real positivo x e para $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \cdot p]{x}$$

Exemplos

$$\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2} \times 2} \\ = \sqrt[4]{8}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^2 \times 3}} \\ = \sqrt[12]{12}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Qual dos números, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$, é maior?

Determinar mentalmente um valor aproximado de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é relativamente fácil, pois sabemos que 1,4 é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ às décimas. Mas, determinar mentalmente um valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ já não é tarefa fácil.

Bem... quem diria que as fracções são equivalentes?! Com efeito, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

O denominador da fracção $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é um número irracional, enquanto o denominador de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é um número racional. Diz-se que **racionalizámos o denominador** da primeira fracção. Esta é a transformação que, por norma, se aplica a todos os resultados em forma de fracção com denominador irracional.

Exemplos

$$(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3} \\ = \sqrt{5^2 \times 5} \\ = 5\sqrt{5}$$

$$(\sqrt[3]{7})^4 = \sqrt[3]{7^4} \\ = 7\sqrt[3]{7}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 \\ = 3 + 2\sqrt{21} + 7 \\ = 10 + 2\sqrt{21}$$

ENQUADRAMENTOS

Há muitas situações em que se torna útil, e mesmo necessário, conhecer enquadramentos para os resultados de adições e multiplicações em que intervêm valores aproximados.

Enquadramento da soma

Calculemos um valor aproximado de $\sqrt{5} + \sqrt{10}$.

Sabendo que $\sqrt{5} = 2,23606\dots$ e que $\sqrt{10} = 3,16227\dots$, utilizemos, por exemplo, valores aproximados a menos de uma centésima:

$$\begin{array}{l} 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \\ 3,16 < \sqrt{10} < 3,17 \\ \hline 5,39 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 5,41 \end{array}$$

adicionando ordenadamente, vem:

5,39 é um valor aproximado da soma $\sqrt{5} + \sqrt{10}$, **por defeito**;

5,41 é um valor aproximado da soma $\sqrt{5} + \sqrt{10}$, **por excesso**;

Qualquer número compreendido entre 5,39 e 5,41 é um valor aproximado de $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ **com erro inferior a 0,02** ($5,41 - 5,39 = 0,02$), ou seja, um **valor aproximado da soma a menos de duas centésimas**.

Diz-se que 0,02 é um **majorante do erro** cometido naquela aproximação.



Enquadramento do produto

Calculemos um valor aproximado de $\sqrt{5} \times \pi$.

Sabendo que $\sqrt{5} = 2,23606\dots$ e que $\pi = 3,141592\dots$, utilizemos, por exemplo, valores aproximados a menos de uma décima:

$$\begin{array}{r} 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \\ 3,1 < \pi < 3,2 \\ \hline 6,82 < \sqrt{5} \times \pi < 7,36 \end{array} \quad \text{multiplicando ordenadamente, vem:}$$

6,82 é um valor aproximado do produto $\sqrt{5} \times \pi$, **por defeito**;

7,36 é um valor aproximado da soma $\sqrt{5} \times \pi$, **por excesso**;

Qualquer número compreendido entre 6,82 e 7,36 é um valor aproximado de $\sqrt{5} \times \pi$ **com erro inferior a 0,54** ($7,36 - 6,82 = 0,54$), ou seja, um **valor aproximado da soma a menos de 54 centésimas**.

Diz-se que 0,54 é um **majorante do erro** cometido naquela aproximação.

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + 0,1\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2}$

2. Calcule

a) $(\sqrt{2} + 1)^2 - 2\sqrt{2}$ b) $(3\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3) + \sqrt{3}$

3. Calcule:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{0,1} \times \sqrt[3]{10}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}$

4. Calcule:

a) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$ c) $\sqrt[3]{6} \div \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2}$

5. Calcule:

a) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[6]{4}$

6. Simplifique cada uma das expressões:

a) $\sqrt{32}$ b) $5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{12}$

7. Efectue as operações indicadas e apresente o resultado na forma mais simples:

a) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ c) $(\sqrt[6]{2})^3$ d) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$ e) $\sqrt{30} \div \sqrt{10}$
b) $\sqrt[3]{28} \div \sqrt[3]{7}$ g) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ h) $\sqrt{7}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$ i) $-\sqrt{27} + \sqrt{3} + \sqrt{75}$ j) $\sqrt{32} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{18} - 9\sqrt{2}$

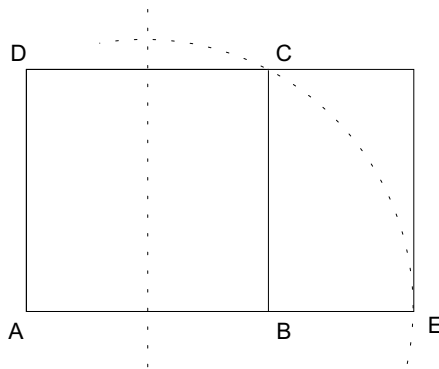
8. Racionalize os denominadores das seguintes expressões:

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$



9. Considere um quadrado [ABCD] com 1 dm de lado.

Determine a mediatriz de [AB].

Com centro no ponto médio de [AB] trace um arco de circunferência que passe por C até encontrar o prolongamento de [AB] para o lado de B no ponto E.

Desenhe o rectângulo de lados [AD] e [AE].

a) Determine o comprimento exacto do lado maior do rectângulo (ϕ).

b) Sabendo que $2,236 < \sqrt{5} < 2,238$, entre que valores varia o lado maior do rectângulo?

c) Determine o perímetro exacto do rectângulo.

10. A figura representa um paralelepípedo rectângulo sectionado pelo plano ABC que o separou em dois sólidos diferentes.

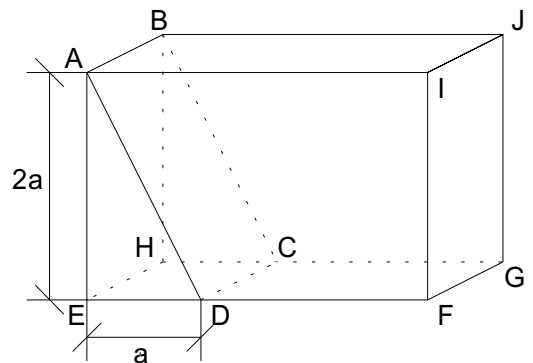
$\overline{AB} = 9 \text{ cm}$

$\overline{EF} = 3 \cdot \overline{ED}$

O volume do sólido menor resultante da divisão é 49 cm^3 .

a) Determine \overline{ED} .

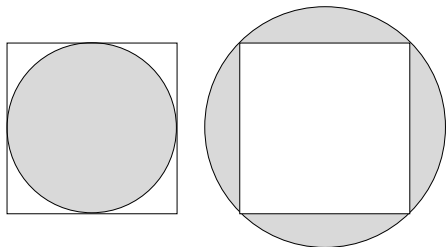
b) Determine o volume do sólido maior obtido no corte.



11. Considere um prisma quadrangular regular em que a altura é o dobro da aresta da base.

a) Representando por a a aresta da base, obtenha as medidas de todas as diagonais do prisma.

b) Determine a medida da aresta da base para que o volume seja 200 cm^3 .



12. Desenhe um quadrado e um círculo inscrito.

Calcule o perímetro e a área do círculo inscrito num quadrado de lado 1. Indique o valor exacto e um valor aproximado.

13. Desenhe um quadrado e um círculo circunscrito.

Calcule o perímetro e a área do círculo circunscrito a um quadrado de lado 1. Indique o valor exacto e um valor aproximado.

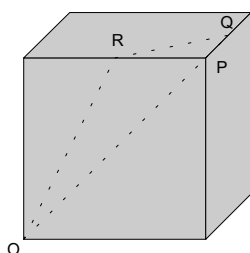
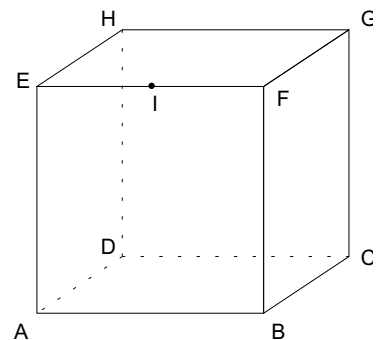
13. Considere o cubo da figura.

I é o ponto médio de [EF].

a) Desenhe a secção resultante da intersecção do cubo pelo plano CIH. Explique o seu raciocínio.

b) Classifique, justificando, o quadrilátero obtido.

c) Calcule o valor exacto do perímetro da secção, sabendo que o comprimento da aresta é 2 cm.



15. Duas formigas vão de O a Q pelas paredes de um cubo, à mesma velocidade (R e Q são os pontos médios das arestas). A formiga A segue o trajecto ORQ e a formiga B o OPQ.

a) Qual das formigas chega primeiro?

b) Sabendo que a aresta do cubo é 2 dm, determine a diferença dos comprimentos dos trajectos, com aproximação à décima de milímetro.

SOLUÇÕES

1. $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{49\sqrt{2}}{15}$; $\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{3}$.

2. 3; $19 - \frac{17\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{3} - 7$.

3. $\sqrt{14}$; 1; $\sqrt[3]{6}$.

4. 2; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{4}$.

5. $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt[3]{2}$.

6. $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

7. $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt{2}$; 5; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$; $7 + \sqrt{35}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$.

8. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\sqrt{3}$; $1 + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

9. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dm; Varia entre 1,618 dm e 1,619 dm; $(3 + \sqrt{5})$ dm.

10. $\frac{7}{3}$ cm; 245 cm^3 .

11. $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{5}$; $a\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{100}$ cm.

12. $P = \pi$; 3,14. $A = \frac{\pi}{4}$; 0,79.

13. $P = \sqrt{2} \cdot \pi$; 4,44. $A = \frac{\pi}{2}$; 1,57.

14. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ cm.

15. Trajecto ORQ: $a \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}$; Trajecto OPQ: $a \frac{2\sqrt{2} + 1}{2}$ (designando a a medida da aresta). 17,8 milímetros.