

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

09/12/2002

Turmas A e B

10.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4-a)	4-b)
Prova 1	D	C	A	B	A
Questão	2	3	4	1-a)	1-b)
Prova 2	C	B	B	D	B

2.ª Parte

1.

a1)

$B(6, 9, 0)$; $E(0, -3, 4)$ e $G(6, 9, 4)$.

a2)

As rectas AB e HE são não coplanares (p. e.). As rectas AB e BC são concorrentes (p. e.).
A recta AB é perpendicular ao plano BCF (p. e.). A intersecção do plano GFD com o plano ABH é a recta AG .

a3)

A distância de F ao plano xOz é 9 unidades e ao plano de equação $z = -2$ é 6 unidades.

a4)

Uma condição que caracteriza o plano que contém a face $[ABGH]$ é: $x = 6$.

a5)

Uma condição que caracteriza a recta FG é: $y = 9 \wedge z = 4$.

a6)

Uma condição que caracteriza a face $[ADEH]$ é: $0 \leq x \leq 6 \wedge y = -3 \wedge 0 \leq z \leq 4$.

b)

A recta BG , paralela a Oz , é perpendicular ao plano xOy . Logo é perpendicular a todas as rectas desse plano e, em particular, à recta AP , visto que A e P , sendo dois pontos de cota nula, são pontos do plano xOy .

c)

O raio da superfície esférica é $r = \overline{AF} = \sqrt{(0-6)^2 + (9-(-3))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{36 + 144 + 16} = \sqrt{196} = 14$.

Portanto, $(x-6)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 196$ define a superfície esférica de centro em A e que contém F .

d)

Se P' um ponto de AB , então a sua abcissa é 6. Assim, $\overline{PP'} = 2 = |x_P - x_{P'}|$, visto ser $PP' \parallel Ox$.

Por outro lado, $\overline{AP} = \sqrt{(8-6)^2 + (4-(-3))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$.

Assim, considerando o triângulo rectângulo $[APP']$, temos $\sin(\hat{P}AB) = \frac{\overline{PP'}}{\overline{AP}} = \frac{2}{\sqrt{53}} = \frac{2}{\sqrt{53}} \times \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{53}} = \frac{2\sqrt{53}}{53}$.

Logo, $\hat{P}AB = \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{53}}{53}\right)$, c.q.m.

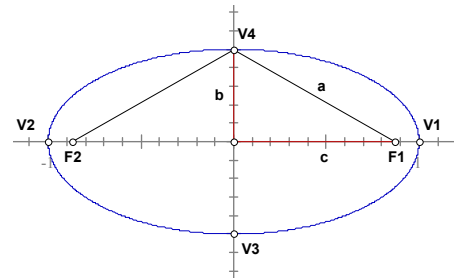
2.

a)

Como $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, a equação pedida será:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Ora, $c = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, $F_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $F_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.



b)

A elipse é o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre os focos. Essa soma de distâncias, como se sabe, é igual ao comprimento do eixo maior. Portanto, tendo em consideração a propriedade reflectora da elipse, «qualquer» que seja a trajetória da bola nas condições enunciadas, o seu comprimento será de 2 metros.

Nota: Entende-se que essa qualquer direcção seria outra que não a «dirigida» ao outro foco (sem usar a tabela), por ser óbvia. Nessa situação, a bola descreveria uma trajetória com $\sqrt{3}$ metros (distância focal).

3.

a)

Como facilmente se observa, 5 das arestas da pirâmide são arestas do cubo, 2 são diagonais faciais do cubo e 1 é diagonal espacial do cubo.

Assim, $C = 5 \times 4 + 2 \times (4\sqrt{2}) + 4\sqrt{3} = 20 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ dm.

b)

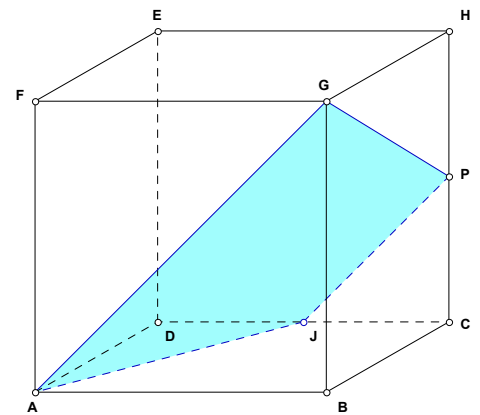
Como $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ e $\sqrt{3} = 1,73205\dots$, vem:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \Leftrightarrow 11,2 < 8\sqrt{2} < 12,0$$

e

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Leftrightarrow 6,8 < 4\sqrt{3} < 7,2$$

$$\text{Assim, } \frac{11,2 < 8\sqrt{2} < 12,0}{18,0 < 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3} < 19,2}$$



Logo, $38,0 \text{ dm} < C < 39,2 \text{ dm}$.

c)

As 4 faces laterais da pirâmide são triângulos rectângulos. Com efeito, [ADE] e [CDE] resultam da divisão da face do cubo por uma sua diagonal; [ABE] e [BCE] são rectângulos em A e C, respectivamente, pois sendo AB perpendicular ao plano ADE é também perpendicular a AE, que é uma recta desse plano, o mesmo se passando com BC e CE.

Logo, $A_{[ABCDE]} = 4^2 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^2}{2} + \frac{4 \times 4\sqrt{2}}{2} + \frac{4 \times 4\sqrt{2}}{2} = 16 + 8 + 8 + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 32 + 16\sqrt{2}$ dm².

d)

Ver figura, onde $PJ \parallel AG$, pois um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas..

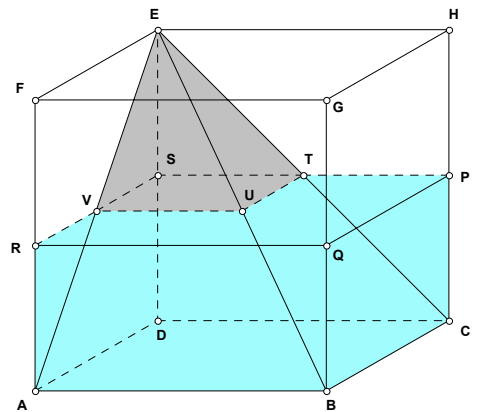
e)

O volume pretendido é $V = V_{[PQRSEFGH]} - V_{[STUVE]}$.

Dado que as faces da menor das pirâmides são semelhantes às correspondentes da pirâmide maior, sendo $r = \frac{1}{2}$ a razão de semelhança, temos:

$$V = 4 \times 4 \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 32 - \frac{8}{3} = \frac{88}{3}$$

Assim, para encher completamente o aquário terá de se acrescentar $29\frac{1}{3}$ litros de água.



4.

a)

Como Q é um ponto da circunferência, as suas coordenadas terão de verificar a equação da mesma.

$$\text{Ora, } 1^2 + y^2 + 4 \times 1 - 21 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = -4 \vee y = 4.$$

Logo, Q (1, -4) e, portanto, P (1, 4), pois são simétricos relativamente a Ox.

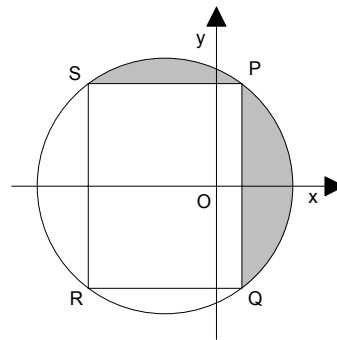
b)

$$\text{Ora, } x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + y^2 - 21 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 5^2.$$

Logo, a circunferência tem 5 unidades de raio e centro em C (-2, 0).

c)

Uma condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira, é $(x+2)^2 + y^2 \leq 5^2 \wedge (x \geq 1 \vee y \geq 4)$.



-
- (1) Se tem dúvidas, represente a recta de equação $x = 3$ no referencial e identifique as coordenadas do ponto de intersecção dessa recta com o eixo Ox.
- (2) Note que a região considerada é a intersecção do semiplano oblíquo inferior (definido pela recta de equação $y = x$) com a reunião de dois semiplanos horizontais: um superior, definido pela recta de equação $y = 2$, e outro inferior, definido pela equação $y = -2$.
- (3) Tenha em consideração as 2.ªs Leis de De Morgan.
- (4) Note que a recta AA' é perpendicular ao plano xOy e $\overline{AA''} = \overline{A'A''}$, sendo A'' (-1, -3, 0) o ponto de intersecção da recta AA' com o plano xOy.
- (5) A esfera tem centro em C (2, -3, 1) e raio 2 unidades. Dado que C dista três unidades do plano definido por $x = 1$, a esfera não é intersectada por este plano.