Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

03/02/2003 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

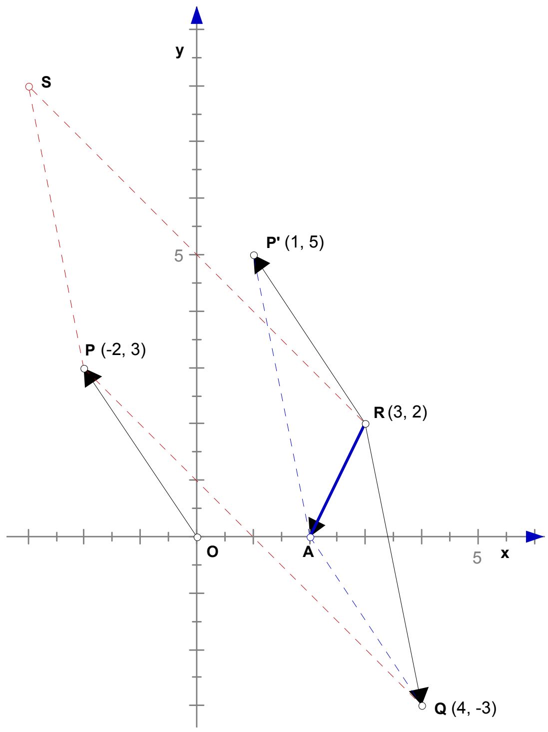
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**A**	**B**	**D**	**C**	**B**
Questão	*3*	*4*	*2*	*1*	*5*
Prova 2	**C**	**A**	**A**	**B**	**D**

2.ª Parte

1.



a)

O vector pedido é $\vec{w} = \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{RQ}$ *, onde* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RP'}$ *.*
(ver figura)

b)

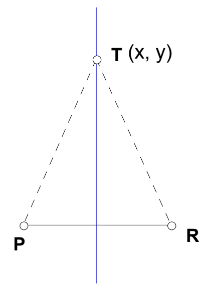
Sendo $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4, -3) - (-2, 3) = (6, -6)$ *, vem*
$N = (-2, 3) - \frac{3}{2}(6, -6) = (-2, 3) - (9, -9) = (-11, 12)$.

c)
Observando a figura ao lado, constatamos (por exemplo)
que $S = P + \overrightarrow{PS} = P + \overrightarrow{QR}$.
Assim, as coordenadas do 4.º vértice são:
$S = (-2, 3) + [(3, 2) - (4, -3)] = (-2, 3) + (-1, 5) = (-3, 8)$.

d)
Os vectores dados serão colineares se e só se as suas coordenadas forem proporcionais.

Dado que $\overrightarrow{RQ} = (1, -5)$ *e* $\vec{a} = (-3, k)$ *, terá de ser*
$\frac{1}{-3} = \frac{-5}{k}$ *, donde* $k = 15$.

e)
A mediatriz do segmento de recta [PR] é o conjunto de pontos do plano equidistantes dos extremos do segmento.



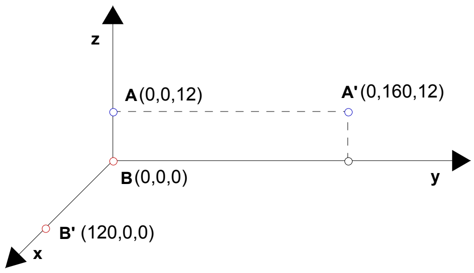
Assim, terá de ser $\overline{TP} = \overline{TR} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ *, donde:*

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow 10x - 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 5x$$

A equação reduzida da mediatriz de [PR] é $y = 5x$.

2.

a) (Ver figura)



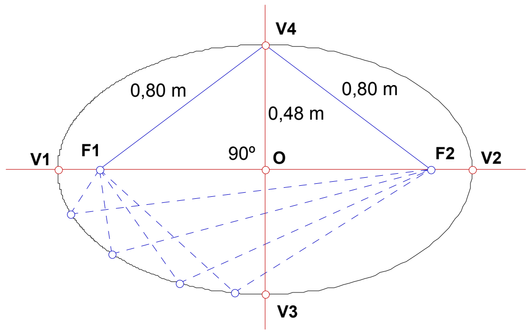
b)

$\overline{A'B'} = \sqrt{(120-0)^2 + (0-160)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{40.144} \approx 200$.

Nesse instante t, os carros distam um do outro cerca de 200 metros.

3.

a)



Elipse é o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre esses focos.

No traçado da elipse pelo "método do jardineiro", prendem-se os dois extremos de um fio não elástico a dois pontos fixos (a medida do comprimento do fio deve ser superior à distância que separa os pontos) e, mantendo o fio sempre esticado, procede-se como é sugerido na figura.

Dada a simetria da elipse relativamente aos eixos V_1V_2 e V_3V_4, constata-se que o comprimento do fio é igual ao comprimento do eixo maior $[V_1V_2]$ (considere a posição do fio quando desenha os pontos V1 ou V2). Por outro lado, quando se desenham os pontos V_3 e V_4 o fio reparte-se igualmente sobre as hipotenusas de dois triângulos rectângulos geometricamente iguais.

Sendo $c = \overline{F_1O} = \sqrt{(0{,}80)^2 - (0{,}48)^2} = \sqrt{0{,}4096} = 0{,}64$ *, conclui-se que deve ser mantida uma distância de 1,28 m entre os pregos e o fio a utilizar deve ter um comprimento (útil) de 1,60 m.*

b)

Ex.mo Senhor Malaquias

Pelo que me apercebi, o Sr. Malaquias não se recorda como se relaciona o comprimento do fio a utilizar com as "dimensões" do tampo da mesa, nem como fixar os pregos. Ora, o fio útil entre os pregos deve ter sempre comprimento igual à maior «dimensão» do tampo elíptico – a que nós chamamos eixo maior da elipse. No caso presente, o fio deve ter 1,60 m do comprimento. Quanto à distância entre os pregos, que é bem mais difícil de saber, deverá ser de 1,28 metros.

Já que recordou qual é o comprimento do fio que deve utilizar em cada situação, aproveito a oportunidade para lhe ensinar como pode fixar os pregos numa situação futura. Comece por desenhar os dois eixos da elipse (sim, o eixo menor corresponde à outra «dimensão» do tampo da mesa) que pretende desenhar e prenda o fio de comprimento adequado aos pregos, como já sabe. De seguida, dobre o fio ao meio, fixe a extremidade dobrada sobre um extremo do eixo menor e, esticando as duas pontas do fio presas aos pregos, faça com que eles fiquem sobre o eixo maior. É aí exactamente que deverá fixar os pregos.

Espero que este contratempo não tenha comprometido o prazo de entrega da encomenda.

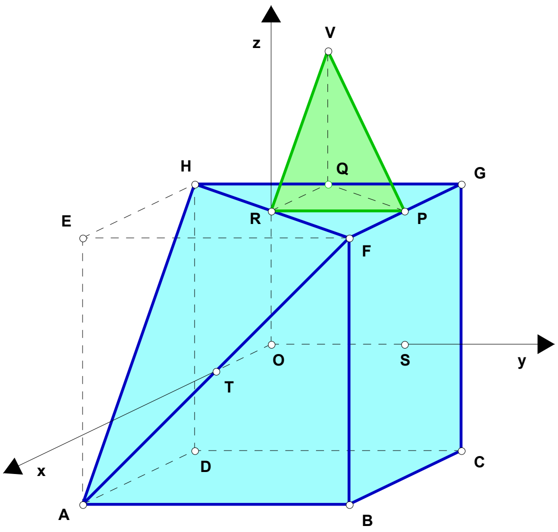
Com os melhores cumprimentos e sempre ao seu dispor,

Fulano de Tal

4.

a)

$H\,(-2,-2,2)$, $Q\,(-2,0,2)$ *e* $S\,(0,2,0)$.



b)

$D+\overrightarrow{CB}=..A..$; $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{HD}=..\overrightarrow{GB}..$;

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=..\vec{0}..$; $G+(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{BC})=..H..$.

c)

O plano mediador de [PR] pode ser definido por $y=1$.

d)

Como $\overrightarrow{BO}=O-B=(0,0,0)-(2,2,-2)=(-2,-2,2)$ *e*

$\overrightarrow{BV}=V-B=(-2,0,4)-(2,2,-2)=(-4,-2,6)$ *será*

$\vec{w}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BV}=(-2,-2,2)+(-4,-2,6)=(-6,-4,8)$.

Logo, $\|\vec{w}\|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$.

e)

Como $\overrightarrow{BV}=(-4,-2,6)$, *o raio da esfera é* $r=\dfrac{\|\overrightarrow{BV}\|}{2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+6^2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{56}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{14}=\sqrt{14}$.

O seu centro é o ponto médio de [BV]: $M\to\left(\frac{2-2}{2},\frac{2+0}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=(0,1,1)$.

Portanto, a esfera considerada pode ser definida por $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 14$.

f)

O volume da pirâmide [EFHA] é $V_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\overline{EH}\times\overline{EF}}{2}\times\overline{EA}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4\times 4}{2}\times 4=\dfrac{32}{3}$ *dm³.*

O volume do cubo é $V_2=4^3=64$ *dm³.*

O triângulo [PRQ] é rectângulo em P, pois $RQ\,//\,EH$ *e* $PR\,//\,HG$.

Como $V\,(-2,0,4)$ *e* $Q\,(-2,0,2)$, *então a recta VQ é perpendicular ao plano EFG.*

Assim, o volume da pirâmide [PQRV] é $V_3=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\overline{RQ}\times\overline{RP}}{2}\times\overline{VQ}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\times 2}{2}\times 2=\dfrac{4}{3}$ *dm³.*

Portanto, o volume do sólido é $V=64-\dfrac{32}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{192-28}{3}=\dfrac{164}{3}$ *dm³.*

FIM

---

(1) Designado por d o diâmetro das esferas, por H e P, respectivamente, os comprimentos das fitas verde e vermelha, temos: $H=3\times d$ e $P=\pi\times d$. Como $d>0$ e $\pi>3$, então $P>H$.

(2) Recorde a definição de mediatriz de um segmento de recta.

(3) Como $\overrightarrow{AB}=(1,3)-(-3,2)=(4,1)$ e $\vec{u}=(-1,4)$, então $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+1^2}=\|\vec{u}\|=\sqrt{(1)^2+4^2}=\sqrt{17}$.
Como as coordenadas dos vectores não são proporcionais, então não são colineares. (condição que elimina 3 das alternativas)

(4) O domínio plano pode ser obtido pela intersecção do círculo ($x^2+(y+1)^2\le 4$), com a faixa vertical fechada ($0\le x\le 1$) e com o semiplano horizontal fechado ($y\le -1$).

(5) Na figura da direita, o ponto R pertence simultaneamente ao plano seccionador, ao plano ACD e ao plano BCD. Com efeito, a recta MN pertence ao plano seccionador e ao plano ACD, logo R é ponto da intersecção do plano seccionador com o plano ACD. Dado que a recta CD, à qual pertence R, é também uma recta pertencente ao plano BCD, então R é ponto do plano seccionador e do plano BCD. Consequentemente o plano seccionador intersecta o plano BCD segundo a recta RP.