

# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

31/03/2003

Turma A - Provas 1 e 2

10.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

	1 <sup>(1)</sup>	2 <sup>(2)</sup>	3 <sup>(3)</sup>	4 <sup>(4)</sup>	5 <sup>(5)</sup>
<b>Questão</b>	1	2	3	4	5
<b>Prova 1</b>	C	A	D	C	B
<b>Questão</b>	4	3	2	1	5
<b>Prova 2</b>	D	B	A	B	C

### 2.ª Parte

1.

a)

Ora,  $\overline{AC} = \sqrt{(6-4)^2 + (7-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33} = \sqrt{(2-4)^2 + (7-5)^2 + (0-5)^2} = \overline{AB}$ .  
 Portanto, A é um ponto do plano mediador do segmento [BC], pois é equidistante dos extremos do segmento.

Ou ainda:

Como o plano mediador de um segmento de recta é perpendicular ao segmento no seu ponto médio, então  $x = 4$  é uma equação desse plano. Ora, A (4, 5, 5) é um ponto desse plano, pois as suas coordenadas verificam a condição que define o plano.

b)

A recta BH é uma recta do plano seccionador e do plano que contém a base da pirâmide. Logo, a secção obtida na base da pirâmide é o segmento de recta [BF]. Como A é ponto comum ao plano seccionador e à face [ADE], então a secção obtida nesta face é o segmento de recta [AF]. Por outro lado, [AB] é comum ao plano seccionador e às faces [ABC] e [ABE]. Assim, a secção obtida é o triângulo [ABF].

c)

Ora,  $\vec{HB} = B - H = (2, 7, 0) - (5, 0, 0) = (-3, 7, 0)$  e H é um ponto dessa recta.  
 Logo,  $(x, y, z) = (5, 0, 0) + k(-3, 7, 0) \wedge k \in \mathbb{R}$  é uma equação vectorial da recta HB.

d)

Ora,  $\vec{HA} = A - H = (4, 5, 5) - (5, 0, 0) = (-1, 5, 5)$  e  $\vec{CE} = E - C = (2, 3, 0) - (6, 7, 0) = (-4, -4, 0)$ .

Assim,  $\vec{w} = \vec{HA} - \vec{CE} = (-1, 5, 5) - (-4, -4, 0) = (3, 9, 5)$ . Logo,  $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 5^2} = \sqrt{115}$ .

e)

Ora,  $\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (7-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33}$ , pelo que o raio da superfície esférica é  $\frac{\sqrt{33}}{2}$ .

O seu centro é ponto médio do segmento de recta [AB]:  $M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{5+7}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = (3, 6, \frac{5+0}{2})$ .

Logo,  $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-\frac{5}{2})^2 = \frac{33}{4}$  define a superfície esférica considerada.

f)

Ora, como  $G\left(\frac{6+2}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 5, 0)$  e  $A = (4, 5, 5)$ , então AG é perpendicular ao plano xOy, que contém a base da pirâmide, sendo, portanto,  $\overline{AG} = 5$ .

O raio da base do cone é a semi-diagonal da base da pirâmide, portanto  $r = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{CD} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ .

Logo,  $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 5 = \frac{40\pi}{3}$  unidades de volume.

2.

Como as velocidades são constantes, os gráficos que relacionam o tempo e a distância percorrida pelo Filipe (F) e pela mãe (M) vão ser "rectas" com declive igual à velocidade.

No instante 0, o Filipe sai de casa. Isto corresponde ao ponto O, origem do referencial.

À velocidade que vai, numa hora faz 20 Km. Marcamos o ponto A (1, 20).

A mãe partiu meia hora depois, ou seja, quando  $t = 0$  a distância percorrida era ainda zero. Marcamos o ponto B (0,5; 0).

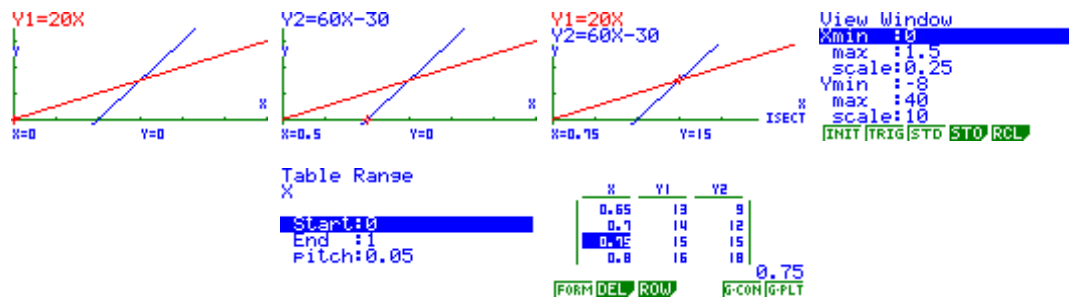
Como meia hora depois ela teria percorrido 30 km, obtemos o ponto C (1, 30).

A solução do problema está em P, o ponto de intersecção dos dois gráficos.

O percurso do Filipe é dado pela equação  $d_F = 20t$ .

O percurso da mãe é dado por uma equação do tipo  $d_M = 60t + b$ . Substituindo na equação as variáveis  $t$  e  $d$  pelas coordenadas do ponto C (1, 30), obtém-se:  $30 = 60 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -30$ . Portanto, será  $d_M = 60t - 30$ .

Definidas as funções  $y_1 = 20x$  e  $y_2 = 60x - 30$ , podemos obter os gráficos numa janela adequada:

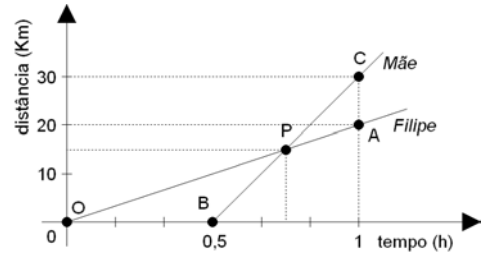


Utilizando o comando G-Solv + ISCT, a calculadora fornece para coordenadas do ponto P: (0,75; 15), que podem ser confirmadas na tabela de valores dessas mesmas funções.

Resolvendo o sistema de equações, podemos confirmar esses valores:

$$\begin{cases} d = 20t \\ d = 60t - 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20t \\ 20t = 60t - 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20t \\ 4t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} \\ d = 15 \end{cases} \quad (0,75^h = 0,75 \times 60^{\text{min}} = 45^{\text{min}})$$

Portanto, a mãe teve de percorrer 15 km até encontrar o Filipe, demorando 15 minutos (45-30) nessa perseguição.



3.

a)

$$D_f = ]-4, 2[ \cup ]2, 6]; D'_f = [-2, 2[; \text{zeros de } f: x = -2 \text{ e } x = 4.$$

b)

Mínimo absoluto:  $y = -2$ ; mínimo relativo:  $y = -1$ ; máximo relativo:  $y = 1$ ; máximo absoluto: não existe.

c)

x	-4		-2		0		2		4		6
f(x)		+	0	-	-2	+		+	0	-	-1

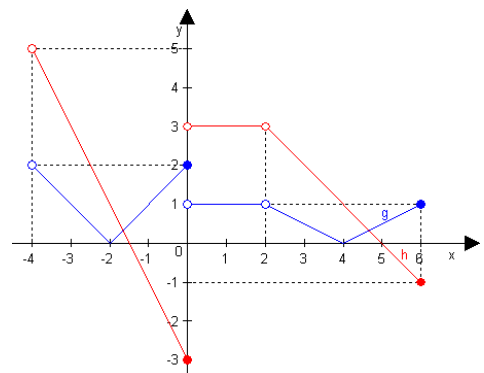
x	-4			0		2				6
f(x)			↘	-2	→			↘		-1

d)

Ver gráficos na figura ao lado.

e)

A afirmação é falsa. Ainda que a função não seja contínua no ponto  $x = 0$  (não é possível desenhar o gráfico em torno desse ponto sem levantar o lápis – há uma quebra em  $x = 0$ ), ela não é uma função injectiva, visto haver objectos diferentes com igual imagem (por exemplo,  $x = 0,5$  e  $x = 1,5$  têm ambos a mesma imagem  $y = 1$ ).



f)

Sejam  $A(-4, 2)$ ,  $B(-2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  e  $D(6, -1)$ .

O declive da recta  $AB$  é  $m_{AB} = \frac{2-0}{-4-(-2)} = -1$  e a ordenada na origem é  $b_{AB} = -2$ . Logo,  $y = -x - 2$  é a equação reduzida da recta  $AB$ .

O declive da recta  $CD$  é  $m_{CD} = \frac{1-(-1)}{2-6} = -\frac{1}{2}$ .

Portanto, a equação reduzida da recta  $CD$  é do tipo  $y = -\frac{1}{2}x + b$ . Como  $C$  é um ponto dessa recta, então as suas coordenadas terão de verificar essa equação:  $1 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2$ .

Logo,  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  é a equação da recta  $CD$ .

Logo,  $f$  pode ser definida analiticamente por:

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \Leftarrow -4 < x \leq 0 \\ 1 & \Leftarrow 0 < x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \Leftarrow 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

4.

a)

Ora,  $j(-1) = 1 - |3 - (-1)| = 1 - |4| = 1 - 4 = -3$  e  $j(1) = 1 - |3 - 1| = 1 - |2| = 1 - 2 = -1$ , isto é,  $j(-1) \neq j(1)$ .

Portanto, é falsa a proposição  $j(-x) = j(x), \forall x \in D_j$ . Logo,  $j$  não é uma função par.

b)

Ora,  $j(4) = 1 - |3 - 4| = 1 - |-1| = 1 - 1 = 0 \neq 2$ .

Logo, o ponto de coordenadas  $(4, 2)$  não é um ponto do gráfico de  $j$ .

c)

Ora,  $j(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - |3 - x| < 0 \Leftrightarrow |3 - x| > 1 \Leftrightarrow 3 - x < -1 \vee 3 - x > 1 \Leftrightarrow x > 4 \vee x < 2$ .

Logo, a função é negativa em  $]-\infty, 2[ \cup ]4, +\infty[$ .

d)

Ora,  $j : x \rightarrow 1 - |3 - x| = \begin{cases} 1 - (-3 + x) & \Leftarrow 3 - x < 0 \\ 1 - (3 - x) & \Leftarrow 3 - x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 4 - x & \Leftarrow x > 3 \\ -2 + x & \Leftarrow x \leq 3 \end{cases}$

**FIM**

(1) Note que:

$$A + \vec{EC} = A + \vec{AE} = E; \quad \vec{AE} + \vec{DE} = \vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{e} \quad \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{DC} - \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}.$$

(2) Note que  $|y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$  e que a condição  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  define a circunferência de centro em  $(a, b)$  e raio  $r$  ( $r > 0$ ).

(3) Se o vector  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  é um vector director da recta  $r$ , então o seu declive é  $m_r = \frac{u_2}{u_1}$ , com  $u_1 \neq 0$ .

(4) O gráfico de  $Y_2$  pode ser obtido do gráfico de  $Y_1$  por translação associada ao vector  $\vec{v} = (2, 1)$ , logo  $Y_2(x) = Y_1(x - 2) + 1$ .

(5) Não acredito que tenha dúvidas!

Mesmo assim, fica o convite:

[http://www.prof2000.pt/users/amma/recursos\\_materiais/alabmat/0\\_ficheiros/P\\_nacirc.gsp](http://www.prof2000.pt/users/amma/recursos_materiais/alabmat/0_ficheiros/P_nacirc.gsp)