Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

16/06/2003 **Turma A - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**C**	**B**	**A**	**B**	**A**
Questão	*2*	*3*	*1*	*5*	*4*
Prova 2	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**

2.ª Parte

1.

a)

Sendo H (-3, -3, 3) e V (3, 3, 1), então $\overrightarrow{HV} = (3,3,1) - (-3,-3,3) = (6,6,-2)$ *é um vector director da recta HV.*
Logo, $(x, y, z) = (3, 3, 1) + k(3, 3, -1), k \in IR$ *é uma equação vectorial dessa recta.*

b)

Sendo U (3, 1, 3) e V (3, 3, 1), então $\overrightarrow{VU} = (3,1,3) - (3,3,1) = (0,-2,2)$ *e* $-\overrightarrow{VH} = \overrightarrow{HV} = (6,6,-2)$ *(**a)**).*
Logo, $\vec{w} = (0,-2,2) + (6,6,-2) = (6,4,0)$ *e* $\|\vec{w}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \times 13} = 2\sqrt{13}$ *.*

c)

O plano mediador do segmento de recta [UV] é o conjunto de pontos P (x, y, z) do espaço equidistantes dos extremos do segmento.
Assim, terá de ser $\overline{PU} = \overline{PV} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$ *, donde:*

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 \\ &\Leftrightarrow 4y - 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow y = z\end{aligned}$$

Portanto, $y = z \wedge x \in IR$ *é uma condição do plano pedido.*
(Note que a condição poderia ter sido descoberta por visualização)

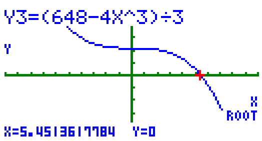
d1)

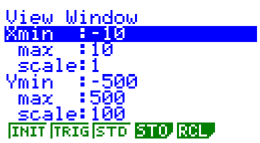
O volume do cubo é $V_C = 6^3 = 216$ *.*
As 8 pirâmides obtidas pelas secções referidas são geometricamente iguais, podendo o volume de uma delas ser expresso em função de x: $V_P = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{x \times x}{2} \times x = \frac{x^3}{6}$ *(note que* $V_{[UVXF]} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{UF} \times \overline{FV}}{2} \times \overline{FX}$ *).*

Assim, $V(x) = V_C - 8 \times V_P = 216 - 8 \times \frac{x^3}{6} = \frac{1296 - 8x^3}{6} = \frac{648 - 4x^3}{3}$ *, (* $x \in]0, 3]$ *), c.q.m..*

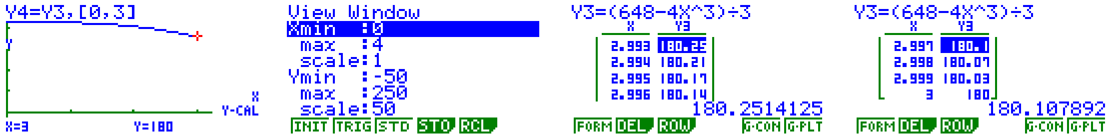
d2)

Fazendo a extensão do domínio de V a IR, estamos face a uma função polinomial cúbica, com apenas um zero ($V(x) = 0 \Leftrightarrow 648 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 162 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{162}$ *) e estritamente decrescente, como podemos verificar utilizando a calculadora gráfica:*





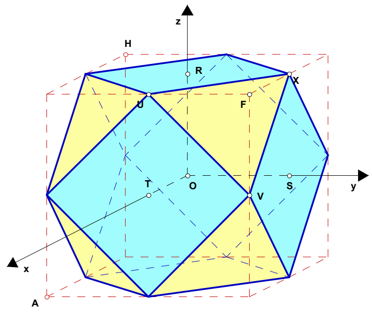
Restringindo agora ao domínio de V, podemos verificar que o volume mínimo do cubo truncado é 180 unidades de volume e que ocorre para $x = 3$ (extremo superior do domínio de V):



Para $x = 3$, podemos constatar que os pontos U, V e X coincidem com os pontos médios das arestas a que pertencem. O mesmo acontece com os outros pontos correspondentes, nas 3 arestas concorrentes em cada um dos outros 7 vértices do cubo original.

Nesta posição extrema, as faces octogonais do cubo truncado, construídas em cada uma das faces do cubo original, passam a ser quadrados que, dois a dois, apenas possuem entre si um ponto comum (ponto médio duma aresta do cubo original); as restantes 8 faces do cubo truncado continuam a ser triângulos equiláteros, sendo cada um dos seus lados comum a um lado de três quadrados distintos.

Assim, as arestas do cubo truncado são em número igual ao total de lados destes 6 quadrados: $6 \times 4 = 24$.



2.

a)

Ora, $j(-1) = 2.|-1-1| - 3 = 2 \times 2 - 3 = 1$ e $j(1) = 2.|1-1| - 3 = 0 = -3$, isto é, $j(-1) \neq j(1)$.

Portanto, é falsa a proposição $j(-x) = j(x), \forall x \in D_j$. Isto é, j não é uma função par, pelo que o seu gráfico não pode ser simétrico relativamente ao eixo Oy.

b)

Ora, $j(x) \geq 4 \Leftrightarrow 2.|x-1| - 3 \geq 4 \Leftrightarrow |x-1| \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x - 1 \leq -\frac{7}{2} \vee x - 1 \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2} \vee x \geq \frac{9}{2}$.

3.

a)

Dado que as coordenadas do vértice são (-2, 4), a função quadrática correspondente à parábola que contém a trajectória descrita pela bola é do tipo $d(x) = a(x+2)^2 + 4$, com $a \in IR^-$. (Porquê?)

Como a bola toca o chão no campo do jogador B a uma distância de 6 metros da rede, então $d(6) = 0$.

Logo, $a(6+2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{4}{64} \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{16}$.

Portanto, $d(x) = -\dfrac{1}{16}.(x+2)^2 + 4 = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{4x}{16} - \dfrac{4}{16} + 4 = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{60}{16} = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{15}{4}$, $x \in [-8, 6]$, c. q. m..

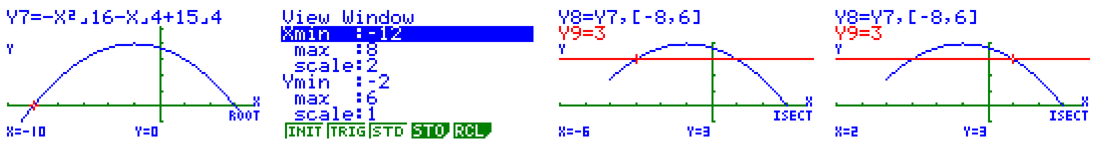
b)

O jogador bateu a bola na posição $x = -8$.

Como $d(-8) = -\dfrac{(-8)^2}{16} - \dfrac{-8}{4} + \dfrac{15}{4} = -4 + 2 + 3{,}75 = 1{,}75$, o jogador bateu a bola a uma altura de 1,75 metros.

c)

Começando por fazer a representação da função considerada e uma outra auxiliar $x \to f(x) = 3$, temos:



De acordo com o registado, temos $d(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in]-6, 2[$.

Logo, durante a sua trajectória, a bola está a uma altura superior a 3 metros, entre as posições compreendidas a uma distância de 6 e 2 metros do plano da rede, respectivamente medidas no campo do jogador A e no campo do jogador B.

O que se confirma: $d(x) > 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}(x+2)^2 + 4 > 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < x + 2 < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 2$.

Ou:

Ora, $d(x) > 3 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{15}{4} > 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 60 < -48 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 < 0$

Como $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$ *e como a função*

$x \to t(x) = x^2 + 4x - 12$ *tem por gráfico uma parábola com a concavidade voltada para cima, tendo dois zeros é negativa entre eles. Logo, podemos concluir que* $d(x) > 3 \Leftrightarrow t(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-6, 2\right[$.

4.

a)

$$\begin{array}{rrrr|l} +2x^3 & -10x^2 & +14x & -6 & x^2 \quad +1 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & -2x & & 2x \quad -10 \\ \hline & -10x^2 & +12x & -6 & \\ & +10x^2 & & +10 & \\ \hline & & +12x & +4 & \end{array}$$

Portanto, $q_1(x) = 2x - 10$ *e* $r_1(x) = 12x + 4$.

b)

Ora;

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & -10 & 14 & -6 \\ 1 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 2 & -8 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

Logo, $h(x) = (x-1).(2x^2 - 8x + 6)$, *pelo que* $q(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

c)

Se $h(x) = 2(x-1)^2.(x-3)$, *então* $q(x)$ *possui dois zeros: 1 e 3. Consequentemente* $q(x)$ *é sucessivamente divisível por* $(x-1)$ *e por* $(x-3)$, *pelo que aplicando a regra de Ruffini, temos:*

$$\begin{array}{c|rrr} & 2 & -8 & 6 \\ 1 & & 2 & -6 \\ \hline & 2 & -6 & \boxed{0} \\ 3 & & 6 & \\ \hline & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Logo, $q(x) = 2(x-1)(x-3)$. *Consequentemente,* $h(x) = 2(x-1)^2.(x-3)$.

Construindo uma tabela de variação de sinal, tendo em consideração as propriedades das funções afim e quadrática, vem:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$2(x-1)^2$	+	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$h(x) = 2(x-1)^2(x-3)$	-	0	-	0	+

Logo, $h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, 3\right[$, *pelo que* $S = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, 3\right[$.

FIM

(1) Uma função é ímpar se e só se objectos simétricos tiverem imagens simétricas: $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.
Logo, o gráfico de *f* é simétrico em relação à origem do referencial.
Uma função é injectiva se e só se objectos diferentes tiverem imagens diferentes: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$.
Logo, uma qualquer recta horizontal não pode intersectar o gráfico de *f* em mais do que um ponto.

(2) Basta tem em consideração que o gráfico de *g* pode ser obtido por translação associada ao vector $\vec{u} = (0, -2)$ do gráfico de *f*.

(3) O cálculo da área da secção obtida para $c = -1$, $c = 0$ e $c = 1$, respectivamente, $a(-1) = \pi \times 0^2 = 0$, $a(0) = \pi \times 1^2 = \pi$ e $a(1) = \pi \times 0^2 = 0$, permite eliminar três das alternativas. Por outro lado, constatando que a área da secção obtida é máxima para $c = 0$ (isto é, que $c = 0$ é maximizante) pode eliminar-se imediatamente três das alternativas.

(4) Dado que $2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$, o declive da recta é $m = 2 = \frac{u_2}{u_1}$, sendo u_1 e u_2 as coordenadas de um vector director.

(5) Basta ter em consideração que as rectas que contêm os lados do triângulo são: $y = x + 2$, $y = -x + 2$ e $y = 0$.