

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

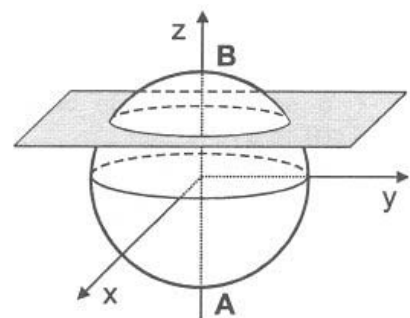
Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

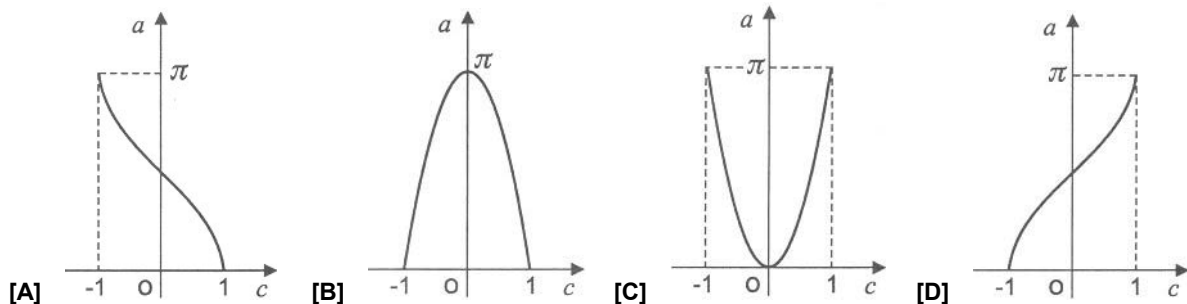
Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$, que está contido no eixo Oz .

Para cada posição do ponto P , considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy .

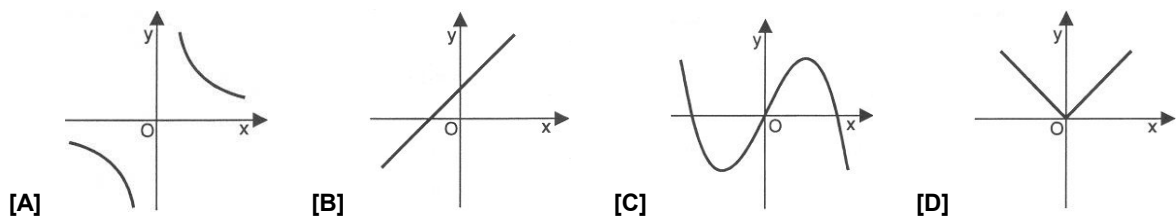
Seja g a função que faz corresponder, à cota c do ponto P , a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano.



Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g ?



2. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.

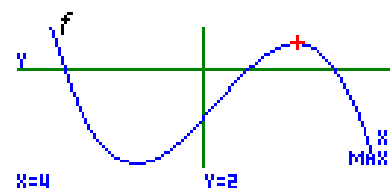


3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , polinomial do terceiro grau.

2 é um máximo relativo da função f .

Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = f(x) - 2$.

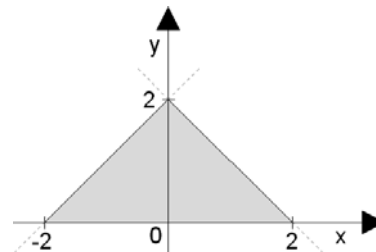
Quantos são os zeros da função g ?



- [A] quatro [B] três [C] dois [D] um

4. Uma condição que define o domínio plano, incluindo a fronteira, é:

- [A] $y \leq x \wedge y \leq -x \wedge y \geq 0$
- [B] $-2 < x < 2 \wedge -x + 2 \leq y \leq x + 2$
- [C] $y \leq x + 2 \wedge y \leq -x + 2 \wedge y \geq 0$
- [D] $y \leq -2x + 2 \wedge y \leq 2x + 2 \wedge y \geq 0$



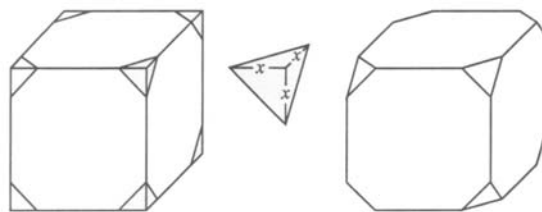
5. Um vector director da recta $t: 2x - y + 2 = 0$ é:

- [A] $\vec{u} = (-2, 1)$
- [B] $\vec{u} = (2, 1)$
- [C] $\vec{u} = (1, -2)$
- [D] $\vec{u} = (-1, -2)$

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

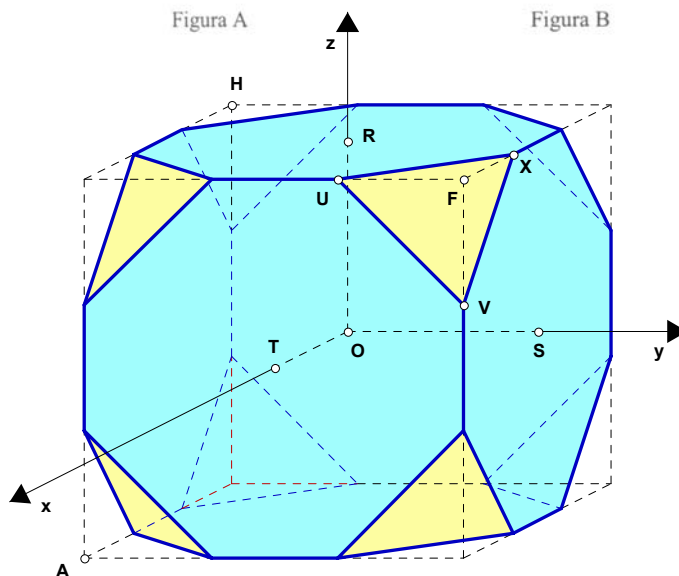
1. A figura A representa um cubo com aresta 6. Considere, para cada vértice, os pontos das arestas que estão à distância x ($0 < x \leq 3$) desse vértice. Seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, obtemos o poliedro (*cubo truncado*) representado na figura B.



Para $x = 2$, obtém-se o *cubo truncado* representado no referencial o. n. $Oxyz$, onde:

- Os planos coordenados são planos de simetria do sólido
- A, H e F são vértices do cubo original
- R, S e T são pontos de intersecção dos semieixos com as faces do sólido
- $U(3, 1, 3)$, $V(3, 3, 1)$ e $X(1, 3, 3)$

- a) Determine uma equação vectorial da recta HV.
- b) Determine a norma do vector $\vec{w} = \vec{VU} - \vec{VH}$.
- c) Determine uma equação do plano mediador do segmento de recta [UV].
- d) Recorde que, para cada vértice, se consideraram os pontos das arestas que estão à distância x ($0 < x \leq 3$) desse vértice.



E que, seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, se obteve o *cubo truncado*.

d1) Mostre que o volume do *cubo truncado* é dado, em função de x , por

$$V(x) = \frac{648 - 4x^3}{3} \quad (x \in]0, 3])$$

d2) Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de x para o qual o volume do *cubo truncado* é mínimo. Para esse valor de x , indique, justificando, quantas arestas tem o poliedro.

Nota: Na primeira parte da questão, justificando a conclusão, deverá descrever os procedimentos que utilizou. Pode esboçar gráficos ou tabelas copiados da calculadora, que considere elucidativos. Na segunda parte da questão, pode tentar esboçar parte do poliedro então obtido a partir do cubo inicial, o que poderá facilitar a descoberta de um algoritmo para a contagem pedida.

2. Considere a função de domínio \mathbb{R} , definida por $j : x \rightarrow 2|x - 1| - 3$.

a) O João pegou na calculadora gráfica e, passado pouco tempo, exclamou:

“Ah!, o gráfico da função j é simétrico relativamente ao eixo Oy .”

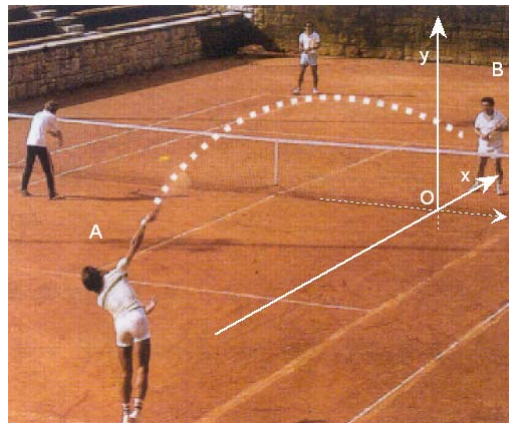
Sem recorrer ao gráfico da função ou à calculadora, justifique que é falsa a afirmação do João.

b) Resolva analiticamente a condição $j(x) \geq 4$.

3. Numa partida de ténis, em certo momento o jogador A bate a bola a uma distância de 8 m do plano da rede.

A bola, descrevendo uma trajectória parabólica, atinge a altura máxima de 4 m a uma distância de 2 m do plano da rede, ainda no lado do jogador A, tocando o chão no campo do jogador B a uma distância de 6 metros da rede.

Os planos da trajectória da bola, do chão e da rede são ortogonais entre si. Considere ainda o referencial o. n. xOy , cujos eixos resultam da intersecção desses planos e nos quais a unidade de comprimento é o metro.



a) Mostre que $d(x) = -\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{15}{4}$, $x \in [-8, 6]$

traduz distância da bola ao chão (em metros) em função da sua posição relativamente ao plano da rede.

Sugestão: Considerando os dados do problema, comece por escrever $d(x)$ na forma $d(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Determine a que altura o jogador bateu a bola.

c) Entre que distâncias ao plano da rede, está a bola a uma altura superior a 3 metros?

Nota: Pode começar por apresentar uma resolução baseada na utilização da calculadora gráfica. Seguidamente, deverá obrigatoriamente confirmar analiticamente a solução apresentada.

4. Considere a função cúbica definida por $h(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$.

Nota: Não pode apresentar uma resolução baseada na utilização da calculadora gráfica.

a) Usando o algoritmo da divisão inteira, determine o quociente e o resto da divisão de $h(x)$ por $x^2 + 1$.

b) Para todo o x real tem-se que $h(x) = (x - 1)q(x)$.

Utilizando a regra de Ruffini, determine o polinómio $q(x)$.

c) Mostre que $h(x) = 2(x - 1)^2 \cdot (x - 3)$. (sem desenvolver as operações indicadas nesta expressão)

Construindo agora uma tabela de variação de sinal, determine o conjunto-solução da condição $h(x) < 0$.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

2.ª Parte 155 pontos

1. 60 pontos

- a) 9
- b) 12
- c) 12
- d1) 12
- d2) 15

2. 22 pontos

- a) 10
- b) 12

3. 38 pontos

- a) 14
- b) 10
- c) 14

4. 35 pontos

- a) 10
- b) 9
- c) 16

Total 200 pontos