Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

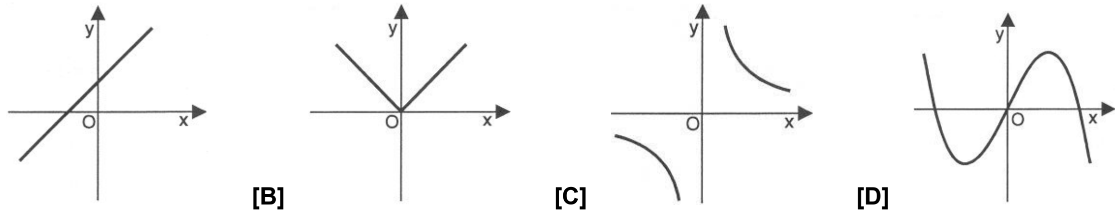
16/06/2003 **Turma B - Prova 1** **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

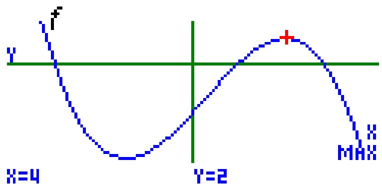
Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.



[A] **[B]** **[C]** **[D]**

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*, polinomial do terceiro grau.



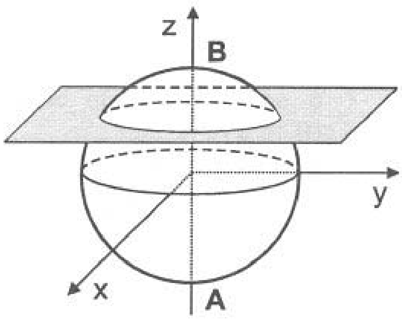
2 é um máximo relativo da função *f*.

Seja ***g*** a função, de domínio *IR*, definida por $g(x) = f(x) - 2$.

Quantos são os zeros da função ***g***?

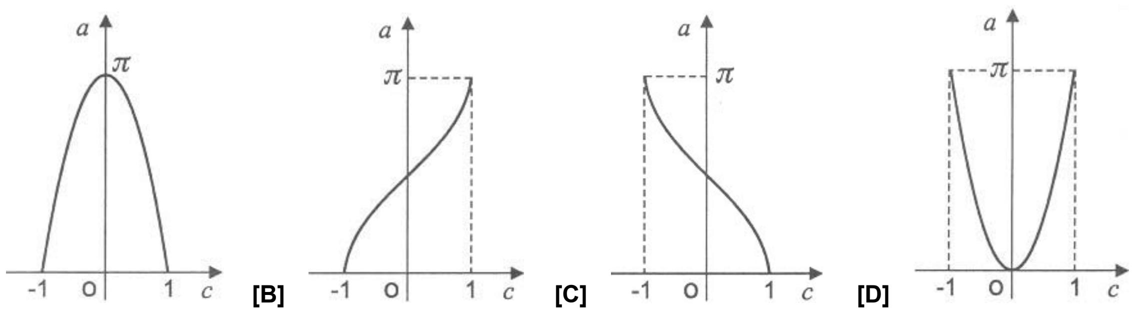
[A] um **[B]** dois **[C]** três **[D]** quatro

3. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro [AB], que está contido no eixo *Oz*.
Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano *xOy*.



Seja *g* a função que faz corresponder, à cota ***c*** do ponto P, a área ***a*** da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função *g*?

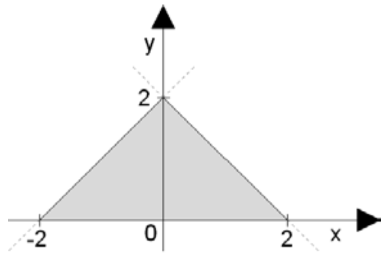


[A] **[B]** **[C]** **[D]**

4. Um vector director da recta t: $2x - y + 2 = 0$ é:

[A] $\vec{u} = (1, -2)$ **[B]** $\vec{u} = (-1, -2)$ **[C]** $\vec{u} = (-2, 1)$ **[D]** $\vec{u} = (2, 1)$

5. Uma condição que define o domínio plano, incluindo a fronteira, é:



[A] $y \le x + 2 \ \wedge \ y \le -x + 2 \ \wedge \ y \ge 0$

[B] $y \le -2x + 2 \ \wedge \ y \le 2x + 2 \ \wedge \ y \ge 0$

[C] $y \le x \ \wedge \ y \le -x \ \wedge \ y \ge 0$

[D] $-2 < x < 2 \ \wedge \ -x + 2 \le y \le x + 2$

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente ***o seu raciocínio de forma clara****, indicando todos* ***os cálculos*** *que tiver de efectuar e* ***as justificações*** *que entender necessárias.*

1. A figura A representa um cubo com aresta 6.
Considere, para cada vértice, os pontos das arestas que estão à distância x $(0 < x \le 3)$ desse vértice. Seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, obtemos o poliedro (*cubo truncado*) representado na figura B.

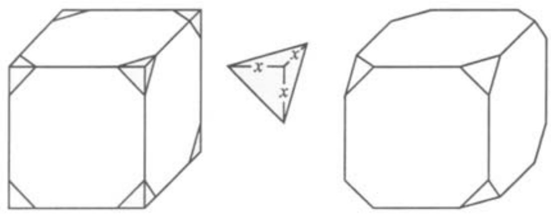
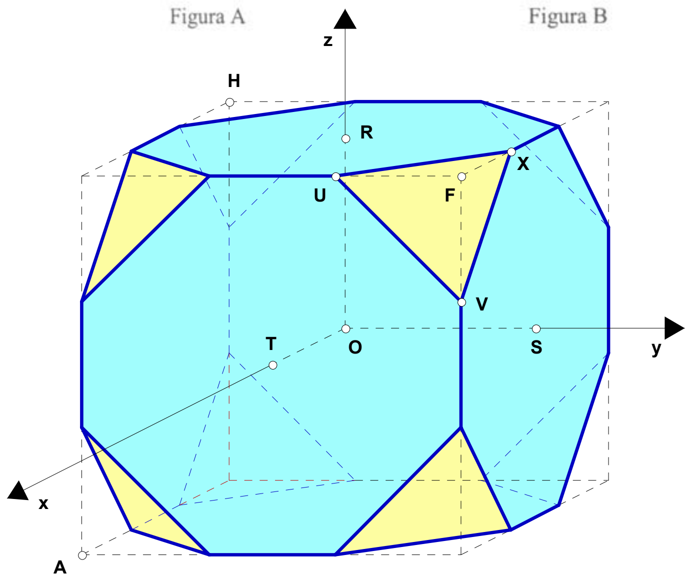


Figura A   Figura B

Para $x = 2$, obtém-se o *cubo truncado* representado no referencial o. n. *Oxyz*, onde:

- Os planos coordenados são planos de simetria do sólido
- A, H e F são vértices do cubo original
- R, S e T são pontos de intersecção dos semieixos com as faces do sólido
- $U\,(3, 1, 3)$, $V\,(3, 3, 1)$ e $X\,(1, 3, 3)$



a) Determine uma equação vectorial da recta HV.

b) Determine a norma do vector $\vec{w} = \overrightarrow{VU} - \overrightarrow{VH}$.

c) Determine uma equação do plano mediador do segmento de recta [UV].

d) Recorde que, para cada vértice, se consideraram os pontos das arestas que estão à distância x $(0 < x \le 3)$ desse vértice.
E que, seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, se obteve o *cubo truncado*.

Mostre que o volume do *cubo truncado* é dado, em função de x, por $V(x) = \dfrac{648 - 4x^3}{3}$ $\quad (x \in \left]0, 3\right])$.

2. Considere a função de domínio *IR*, definida por $j : x \to 2.\left|x - 1\right| - 3$.

a) O João pegou na calculadora gráfica e, passado pouco tempo, exclamou:

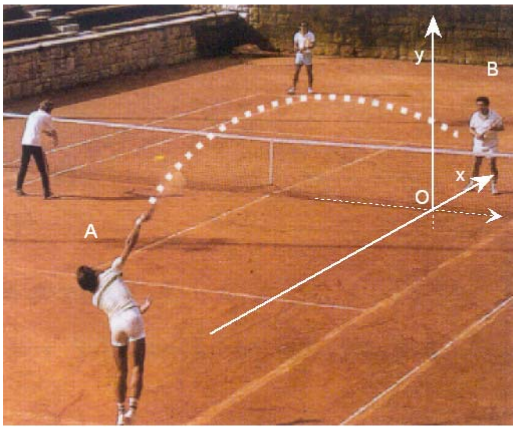
"*Ah!, o gráfico da função j é simétrico relativamente ao eixo Oy.*"

Sem recorrer ao gráfico da função ou à calculadora, justifique que é falsa a afirmação do João.

b) Resolva analiticamente a condição $j(x) \ge 4$.

3. Numa partida de ténis, em certo momento o jogador A bate a bola a uma distância de 8 m do plano da rede.
A bola, descrevendo uma trajectória parabólica, atinge a altura máxima de 4 m a uma distância de 2 m do plano da rede, ainda no lado do jogador A, tocando o chão no campo do jogador B a uma distância de 6 metros da rede.

Os planos da trajectória da bola, do chão e da rede são ortogonais entre si. Considere ainda o referencial o. n. *xOy*, cujos eixos resultam da intersecção desses planos e nos quais a unidade de comprimento é o metro.



a) Mostre que $d(x) = -\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{15}{4}$, $\quad x \in [-8, 6]$

traduz distância da bola ao chão (em metros) em função da sua posição relativamente ao plano da rede.

Sugestão: Considerando os dados do problema, comece por escrever $d(x)$ na forma $d(x) = a(x-h)^2 + k$.

b) Determine a que altura o jogador bateu a bola.

c) Entre que distâncias ao plano da rede, está a bola a uma altura superior a 3 metros?

Nota: Pode começar por apresentar uma resolução baseada na utilização da calculadora gráfica. Seguidamente, deverá obrigatoriamente confirmar analiticamente a solução apresentada.

4. Considere a função quadrática definida por $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Nota: Não pode apresentar uma resolução baseada na utilização da calculadora gráfica.

a) Indique/determine as principais características do gráfico de *g*.
(tipo de gráfico, eixos de simetria, pontos notáveis e pontos de intersecção com os eixos coordenados)

b) Represente graficamente a função $x \to h(x) = \begin{cases} -x+2 & \Leftarrow \quad x<1 \\ -2 & \Leftarrow \quad x=1 \\ g(x) & \Leftarrow \quad x>1 \end{cases}$

5. Considere as seguintes funções, *g* e *h*, ambas de domínio *IR*:

- $g(x) = 2(x-1)^2.(x-3)$
- o gráfico abaixo é uma representação da função *h*

a) Mostre que $g(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$.
Construindo agora uma tabela de variação de sinal, determine o conjunto-solução da condição $g(x) < 0$.

b) Usando o símbolo de módulo (valor absoluto), defina analiticamente a função *h*, da qual se sabe:

- O seu gráfico é constituído por duas semi-rectas com origem em A (2, 1)
- A recta de equação $x = 2$ é eixo de simetria do seu gráfico
- $h(0) = -1$

Descreva o raciocínio utilizado.

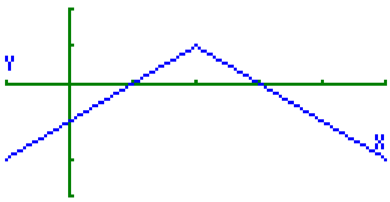


Gráfico de *h*

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
C	0	0	0	0	0	0	0
E	1	9	6	3	0	0	
R	2	18	15	12	9		
T	3	27	24	21			
A	4	36	33				
S	5	45					

2.ª Parte .... 155 pontos

1. .... 45 pontos
   a) 9
   b) 12
   c) 12
   d) 12

2. .... 22 pontos
   a) 10
   b) 12

3. .... 38 pontos
   a) 14
   b) 10
   c) 14

4. .... 24 pontos
   a) 14
   b) 10

5. .... 26 pontos
   a) 14
   b) 12

Total **200 pontos**