

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

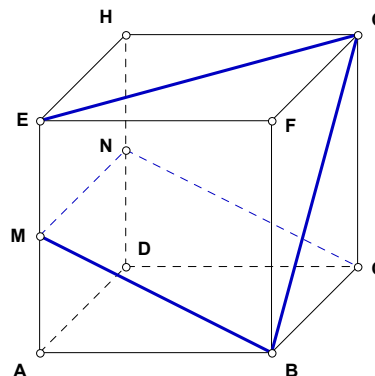
	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2-a)	2-b)	3	4
Prova 1	D	C	A	D	C
Questão	4	3-a)	3-b)	1	2
Prova 2	C	B	D	A	A

2.ª Parte

1.

a1)

Consideremos o triângulo [BGE]. Este triângulo é equilátero, pois os seus lados, sendo diagonais faciais do cubo, são geometricamente iguais. Assim, sendo equilátero o triângulo [BGE], também é equiângulo e, portanto, $\widehat{BGE} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. Logo, a afirmação é verdadeira.

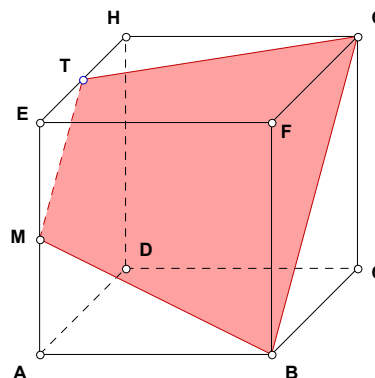


a2)

Por M e N serem os pontos médios das arestas [AE] e [DH], respectivamente, os segmentos de recta [MN] e [AD] são paralelos. Ora, a aresta [AD] é perpendicular à face [CDHG], logo a recta MN é perpendicular ao plano CDH. Assim, esta recta é perpendicular a todas as rectas desse plano, em particular à recta CN, concorrente com ela no ponto N. Deste modo conclui-se que é recto o ângulo MNC, pelo que é falsa a afirmação feita.

b)

Os pontos M e B são pontos quer do plano seccionador quer da face [ABFE]. Logo, o segmento [MB] é a secção feita nessa face. De forma análoga se conclui que o segmento [BG] é a secção feita na face [BCGF]. Como se sabe, um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas. Logo, o plano MBG intersecta os dois planos paralelos BCG e AEH segundo rectas paralelas. Assim, a secção feita na face [AEHD] é o segmento de recta [MT], paralelo ao segmento de recta [BG], dado que M é um ponto comum ao plano seccionador e à face [ADHE]. Por fim, dado que os pontos T e G são simultaneamente pertencentes ao plano seccionador e ao plano que contém a face [EFGH], a secção nesta face é o segmento [TG].



c)

Os segmentos [CG], [EM] e [GE] são, respectivamente, uma aresta, meia aresta e uma diagonal facial do cubo. Assim, $\overline{CG} = a$, $\overline{EM} = \frac{a}{2}$ e $\overline{GE} = \sqrt{2} a$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [MAC], vem

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{2} a)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3}{2} a.$$

Assim, $P = a + \sqrt{2} a + \frac{a}{2} + \frac{3}{2} a = 3a + \sqrt{2} a = (3 + \sqrt{2}) a$, c.q.m..

2.

a) As coordenadas pedidas são: $A(4, -1, 0)$, $F(4, 3, 4)$, $H(0, -1, 4)$ e $Q(2, 3, 4)$.

b1) As rectas AB e EH são não coplanares.
As rectas AB e BF são concorrentes.
A recta AB é perpendicular ao plano ADH .
A intersecção do plano DFQ com o plano ABE é a recta AF .

b2) A distância de B ao plano xOz é 3 unidades e ao plano de equação $y = -2$ é 5 unidades.

c1) Uma condição cartesiana que caracteriza o plano PQE é $z = 4$.

c2) Uma condição cartesiana que caracteriza o segmento de recta $[FQ]$ é $2 \leq x \leq 4 \wedge y = 3 \wedge z = 4$.

c3) Uma condição cartesiana que caracteriza a face $[ADHE]$ é $0 \leq x \leq 4 \wedge y = -1 \wedge 0 \leq z \leq 4$.

d) Como R é um ponto de cota nula, então é um ponto do plano coordenado xOy . Consequentemente, a recta AR é uma recta do plano xOy , pois A pertence também a esse plano. A recta BF , perpendicular ao plano xOy , intersecta este plano no ponto B (não pertencente à recta AR), logo as rectas AR e BF não são concorrentes. Sendo a recta BF perpendicular ao plano xOy , então é perpendicular à recta AR , pois esta é uma recta deste plano. Mas estas rectas também não são paralelas, logo são não coplanares.

Em conclusão, as rectas são perpendiculares não coplanares.

e)

$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{pirâmide}} = 4^3 - \frac{1}{3} \times \frac{\overline{PG} \times \overline{GQ}}{2} \times \overline{GC} = 64 - \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 4 = 64 - \frac{8}{3} = \frac{184}{3} \text{ unidades de volume.}$$

Ora, $\overline{CQ} = \sqrt{\overline{QG}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ e $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ (porquê?).

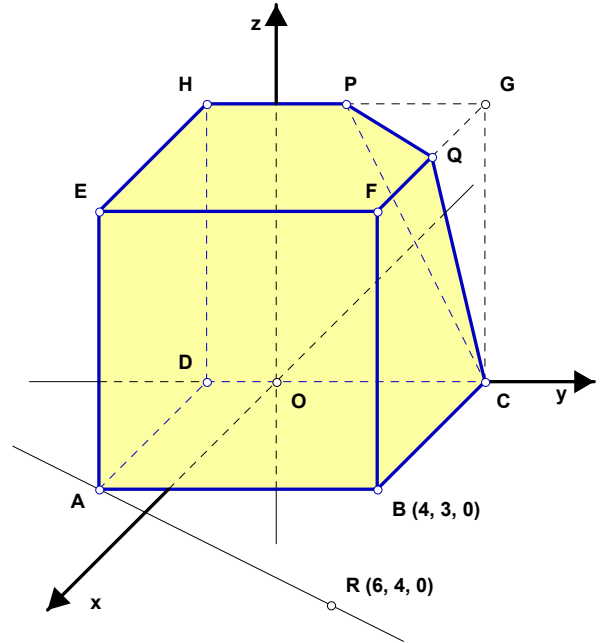
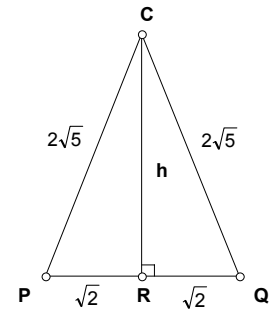
Considerando a altura relativa ao lado $[PQ]$, no triângulo isósceles $[PQC]$, temos:

$$h = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{PR}^2} = \sqrt{(\sqrt{20})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Considerando que as faces do sólido são três faces do cubo, dois trapézios geometricamente iguais, um triângulo isósceles e um pentágono (cuja área é a diferença entre as áreas de um quadrado e um triângulo rectângulo), temos:

$$A = 3 \times (4^2) + 2 \times \left(\frac{4+2}{2} \times 4 \right) + \left(\frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} \right) + \left(4^2 - \frac{2 \times 2}{2} \right) = 48 + 24 + 6 + 14 = 92$$

unidades de área.

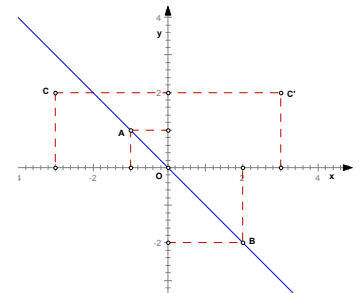


3.

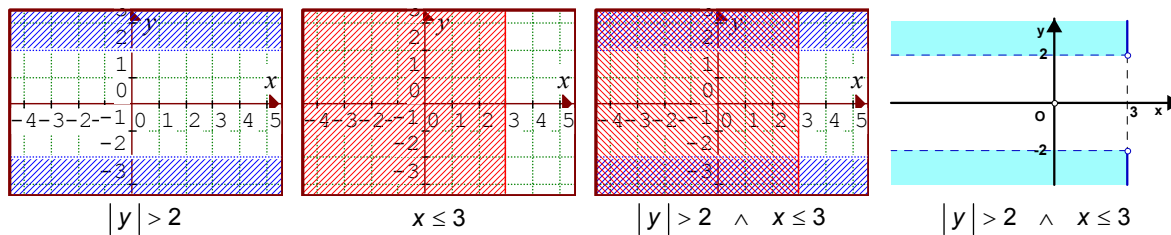
a) Começamos por representar num referencial os três pontos considerados.
Uma condição que define o segmento de recta $[AB]$ é $y = -x \wedge -1 \leq x \leq 2$.

b) O simétrico de C em relação ao eixo Oy é o ponto $C'(3, 2)$.

$$\text{Assim, terá de ser } \begin{cases} \frac{m-1}{2} = 3 \\ 2n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = 1 \end{cases}$$



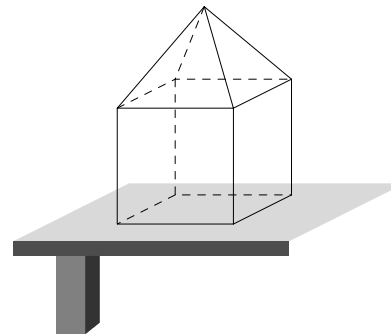
c)



4.

a)

Com o frasco nesta posição horizontal, a figura definida pela superfície do líquido em repouso é a que se obtém no sólido apresentado seccionando-o com um plano horizontal à altura (h , em centímetros) a que se encontra o líquido no frasco. Quando $h \in]0, 4[$, o plano referido secciona o cubo segundo um quadrado geometricamente igual à face do cubo, visto o plano ser paralelo à base. Quando $h \in]4, 7[$, o plano intersecta agora a pirâmide regular. A secção é também um quadrado, visto o plano ser paralelo à sua base. Contudo, este quadrado é de menores dimensões que o obtido por secção no cubo, sendo tanto mais pequeno quanto maior for $h \in]4, 7[$.



Concluindo: a figura definida pela superfície do líquido em repouso é sempre um quadrado, mas nem sempre os vários quadrados obtidos são geometricamente iguais. Logo, não será correcto afirmar que a figura definida pela superfície do líquido em repouso é sempre o "mesmo quadrado".

b)

Começando por determinar o volume do frasco, vem:

$$V_f = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} = 4^3 + \frac{1}{3} \times 4^2 \times 3 = 64 + 16 = 80 \text{ centímetros cúbicos.}$$

Quando o frasco está meio cheio, o líquido ocupa o volume de $\frac{V_f}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm}^3$, que, sendo inferior ao volume do cubo, ocorrerá para uma altura inferior a 4 cm (correspondendo ao volume de um paralelepípedo rectângulo de base igual à base do frasco e altura h' cm).

$$\text{Assim, } 40 = 4^2 \times h' \Leftrightarrow h' = \frac{40}{16} \Leftrightarrow h' = \frac{5}{2}.$$

Nessa situação, a altura do líquido no interior do frasco será de 2,5 cm.

FIM

(1) Em caso de dúvida, faça a representação da recta de equação $x = -2$ num referencial cartesiano. (Note que a recta é paralela ao eixo Oy .)

(2) Em caso de dúvida exponha-a ao seu professor.

(3) Em caso de dúvida exponha-a ao seu professor.

(4) Repare que o triângulo é a intersecção de três semi-planos definidos pelas rectas de equações: $y = x$, $y = -x$ e $y = -1$. Em caso de dúvida exponha-a ao seu professor.

(5) A recta r' é paralela ao plano α , pois é paralela à recta r , contida em α . Como o ponto B (pertencente à recta r') não pertence a α , então a recta r' é estritamente paralela ao plano α e, portanto, não têm pontos comuns.