Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

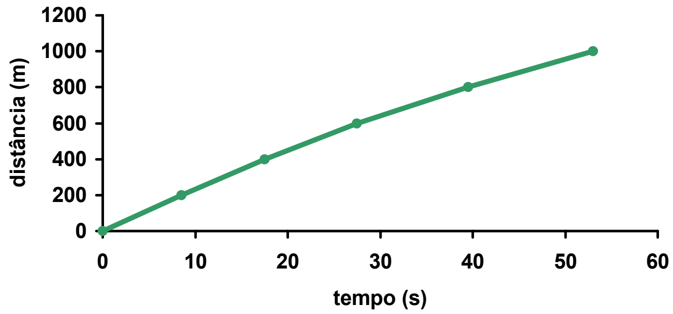
Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 — ***Derivadas - 1*** — **11.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma:____

1. A corrida

Numa corrida de 1000 metros em bicicleta, organizada na escola, o Fernando fez os tempos indicados.



Distância em metros	Tempo em segundos
0	0
200	8,5
400	17,5
600	27,5
800	39,5
1000	53

a) Qual foi a velocidade média na totalidade do percurso?

b) Qual foi a velocidade média em cada um dos intervalos considerados?

c) Quando revelou o Fernando sinais de cansaço?

2. Observe o gráfico

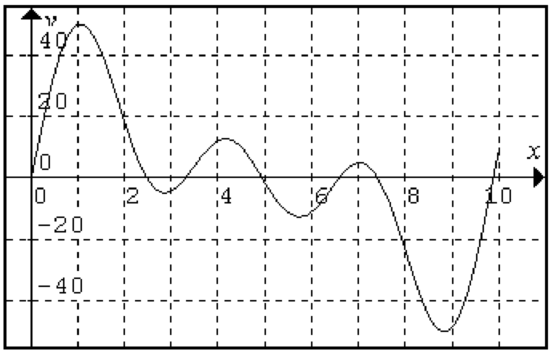
Indique:

a) um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva.

b) um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa.

c) um intervalo onde a taxa média de variação seja nula.

d) um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa e a função não seja monótona.



3. Verdadeiro ou falso?

Indique, justificando, o valor lógico das afirmações:

a) "Se $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}<0$, então *f* é decrescente em $]1,2[$."

b) "Se $f'(0)=0$, então *f* tem um extremo em $x=0$."

c) "Se $f'(x)>0,\ \forall x\in[0,+\infty[$ então *f* é crescente em $[0,+\infty[$."

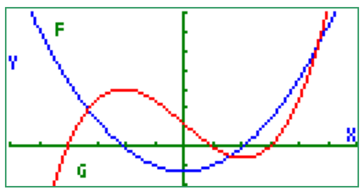
d) "Se $f(x)=|x|$, então *f* tem derivada nula em $x=0$."

e) "Se $f(x)=x^3$, então *f* tem um extremo em $x=0$."

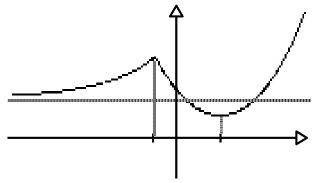
f) "Se *f* tem um extremo relativo, então *f'* tem um zero."

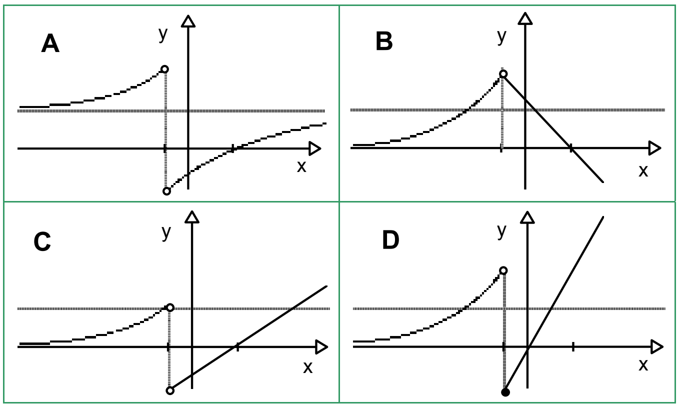
4. Qual é qual?

Estão representadas uma função e a sua derivada.
Qual é o gráfico da função e qual é o gráfico da derivada? Justifique.

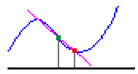


5. **Derivadas e gráficos**
Aqui ao lado está o gráfico da função *h*.
Um dos gráficos abaixo é o da derivada de *h*.
Indique qual é ele, explicando claramente porquê, e porque é que os outros não servem.

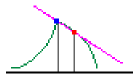




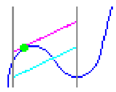
6. http://www.ies.co.jp/math/java/calc/limsec/limsec.html
Execute o *applet* "*Secant Line and Tangent Line*" no endereço indicado acima.
Faça um comentário sobre a experiência que efectuou.



7. http://www.ies.co.jp/math/java/calc/limrl/limrl.html
Execute o *applet* "*One-sided derivative*" no endereço indicado acima.
Faça um comentário sobre a experiência que efectuou.



8. http://www.ies.co.jp/math/java/calc/bib3ji/bib3ji.html
Execute o *applet* "*Derivatives of Cubic Functions*" no endereço indicado acima.
Faça um comentário sobre a experiência que efectuou.



9. http://www.ima.umn.edu/~arnold/calculus/tangent/tangent-j.html
Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.

10. http://www.ima.umn.edu/~arnold/calculus/secants/secants3/secants-j.html
Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.

11. http://www.ima.umn.edu/~arnold/calculus/differential/differential-j.html
Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.

12. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/definition.9/
Resolva o problema proposto.
Compare a sua resolução com a solução apresentada nessa página.

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/

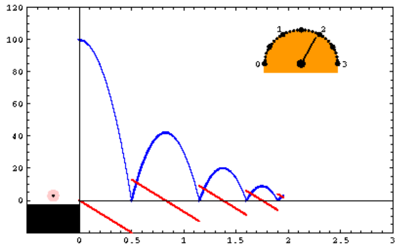
13. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/definition.13/
Resolva o problema proposto.
Compare a sua resolução com as soluções apresentadas nessa página.

Visual Calculus

Derivatives

14. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/definition.7/
Resolva os problemas propostos seguintes: 1, 2, 3, 5 e 8.
Compare a sua resolução com a solução apresentada nessa página.

15. **http://www.ima.umn.edu/~arnold/calculus/bounce/bounce2/bounce-j.html**
Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.



16. O quadro
seguinte apresenta alguns valores e o sinal de *f'*, derivada da função *f*, real de domínio *IR*.

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	-1		+	0	-

O domínio de *f'* é $IR \setminus \{2\}$.
Defina graficamente duas funções distintas que tenham *f'* por derivada.

17. Considere **a função**, real de variável real, de domínio *IR*: $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \Leftarrow \quad x \le 0 \\ 2x - 1 & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$

a) Represente-a graficamente.

b) Descreva o gráfico da função, indicando nomeadamente o domínio, contradomínio, extremos e intervalos de monotonia.

c) Estude a existência de derivada no ponto de abcissa 0. Que conclusão tira?

d) Esboce o gráfico da função derivada de *y*.

SOLUÇÕES

1.

a) 18,87 m/s.

b) 23,53 m/s; 22,22 m/s; 20,00 m/s; 16,67 m/s e 14,81 m/s.

c) De forma significativa, a partir dos 600 metros.

2. Por exemplo:

a) [0, 2].

b) [3, 6].

c) [0, 5].

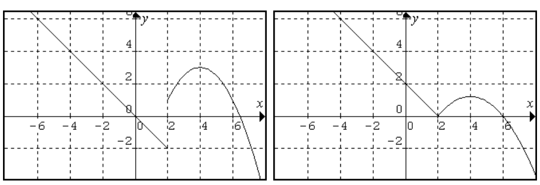
d) [5, 6].

3. São todas falsas, excepto a da alínea c). (Porquê?)

4. $F(x) = G'(x)$ (Porquê?)

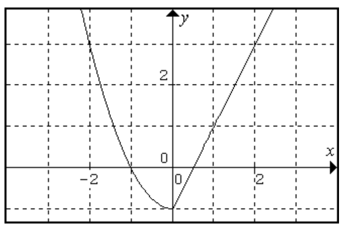
5. C (Porquê?)

16. Por exemplo:



17.

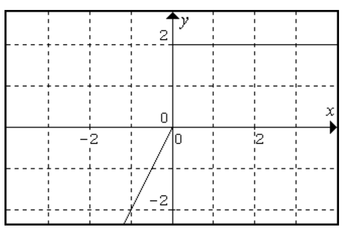
a)



b) $D_y = IR$; $D'_y = [-1, +\infty[$; -1 é um mínimo absoluto;
é estritamente decrescente em IR^- e estritamente crescente em IR^+ .

c) Não existe derivada no ponto de abcissa 0, pois $y'(0^-) = 0$ e $y'(0^+) = 2$.

d)



O Professor

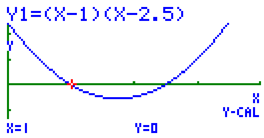
Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

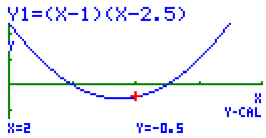
Ficha de Trabalho de Matemática

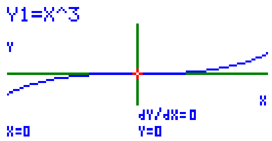
Ano Lectivo 2003/04 — ***Derivadas - 1*** — **11.º Ano**

Proposta de Resolução:

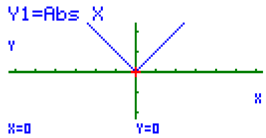
3.

a) É falsa. Considere, por exemplo: 



b) É falsa. Considere, por exemplo: 

c) É verdadeira.

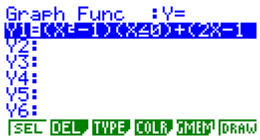
d) É falsa, pois, como $f'(0^-)=-1$ e $f'(0^+)=1$, não existe derivada no ponto $x=0$: 

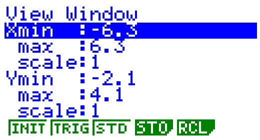
e) É falsa. (Ver alínea b))

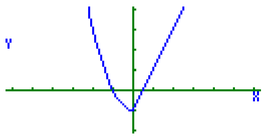
f) É falsa. Considere, por exemplo, a função da questão 17.

17.

a)







b) $D_y = IR$; $D'_y = [-1,+\infty[$; -1 é um mínimo absoluto; é estritamente decrescente em IR^- e estritamente crescente em IR^+.

c) Ora, $tmv_{[0+h,\,0]} = \dfrac{y(0+h)-y(0)}{h} = \dfrac{(0+h)^2-1-(0^2-1)}{h} = \dfrac{h^2}{h} = h$, com $h<0$.

Quando $h \to 0$, $tmv_{[0+h,\,0]} \to 0$. Logo, $y'(0^-)=0$.

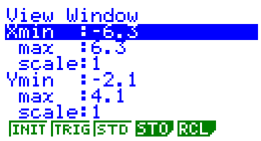
Por outro lado, $tmv_{[0,\,0+h]} = \dfrac{y(0+h)-y(0)}{h} = \dfrac{2.(0+h)-1-(0^2-1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$, com $h>0$.

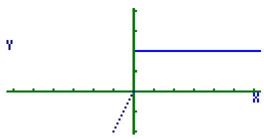
Quando $h \to 0$, $tmv_{[0,\,0+h]} \to 2$. Logo, $y'(0^+)=2$.

Logo, não existe derivada no ponto de abcissa 0, pois as derivadas laterais são diferentes, visto ser $y'(0^-)=0$ e $y'(0^+)=2$.

d) Como a derivada de *y*, de domínio $IR\setminus\{0\}$, pode ser definida por $y'(x)=\begin{cases} 2x & \Leftarrow \quad x<0 \\ 2 & \Leftarrow \quad x>0 \end{cases}$,

obtemos a seguinte representação gráfica:





O Professor