Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

24/11/2003 **Turmas A e B - Prova 1** **11.º Ano**

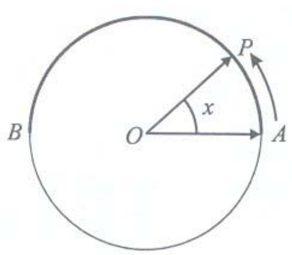
Nome: ______________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

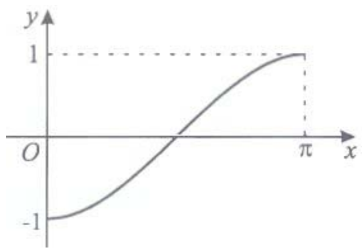
1.ª Parte

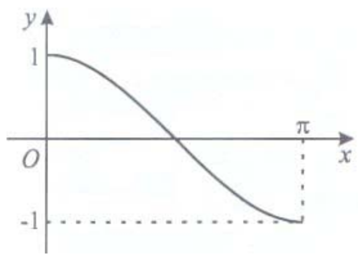
Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

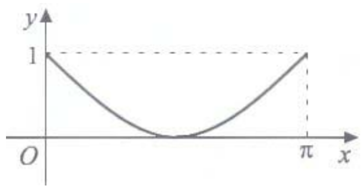
1. Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro O e raio 1.
Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.
Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

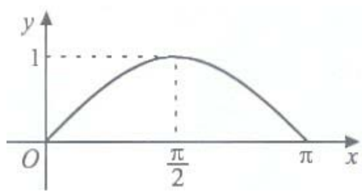
Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?



[A]


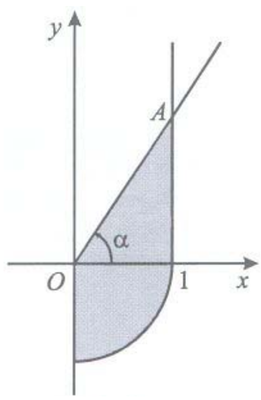
[B]


[C]


[D]


2. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo Oy , com origem no ponto $(1, 0)$
- um ponto A pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude α , cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}A$



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

[A] $\pi + \dfrac{2}{tg\alpha}$

[B] $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{tg\alpha}$

[C] $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{tg\alpha}{2}$

[D] $\pi + \dfrac{tg\alpha}{2}$

3. Considere um vector $\overrightarrow{AB}$ tal que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4$. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$?

[A] -16 **[B]** 0 **[C]** 8 **[D]** 16

4. Uma recta perpendicular à recta ***r***: $x - y = 0$ é a recta de equação:

[A] $(x, y) = (1, 1) + k(-1, -1), k \in IR$

[B] $y = x + 2$

[C] $y = 4 - x$

[D] $(x, y) = (-1, 1) + k(1, 1), k \in IR$

5. Sendo x um ângulo do 2.º quadrante, o valor da expressão $2 + \cos x$ pertence ao intervalo:

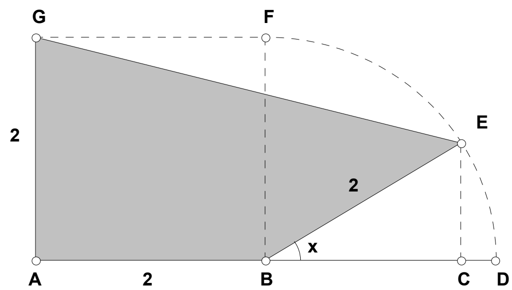
[A] $]-1, 0[$ **[B]** $]-1, 1[$ **[C]** $]1, 2[$ **[D]** $]1, 3[$

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEG]. Tem-se que:

- [ABFG] é um quadrado de lado 2
- FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento [BD], de tal forma que se tem sempre [EC] $\perp$ [BD].
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).



a) Mostre que a área do polígono [ABEG] é dada em função de x, por:

$$A(x) = 2(1 + sen\ x + \cos\ x).$$

Sugestão: Pode ser-lhe útil considerar o trapézio [ACEG]. (note que este trapézio não é o polígono sombreado)

b) Determine $A(0)$ e $A(\frac{\pi}{2})$.

Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) O valor de x que corresponde à área máxima do polígono [ABEG] é uma solução da equação:

$$2\cos\ x - 2sen\ x = 0$$

Determine esse valor de x e encontre o valor máximo da área.

d) Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais a área do polígono [ABEG] é 4,3 ?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

2. Sabendo que $sen\ (\pi + \alpha) = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, calcule $2\,tg\ (-\alpha) - sen\ (\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos\ (\pi - \alpha)$.

3. Resolva as condições seguintes:

a) $sen\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge\ x \in \left]-\pi, \pi\right[$;

b) $tg\ (x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Considere num referencial o. n. *Oxy* :

- uma recta *r*, cuja inclinação é 60º
- dois pontos de coordenadas A (-3, 0) e B (4, 5)

a) Escreva a equação reduzida da recta perpendicular à recta *r* e que contém o ponto A.

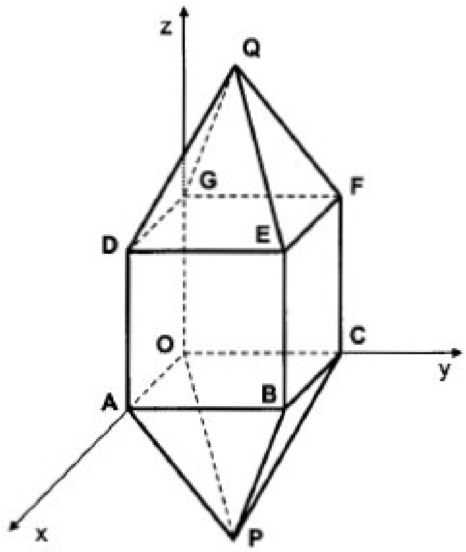
b) Determine as coordenadas de um ponto C, pertencente ao eixo *Ox* , de modo que o triângulo [ABC] seja rectângulo em B.

Nota: Repare que se $P \in Ox$, então $P \rightarrow (x, 0)$.

5. Considere num referencial o. n. *Oxyz* o poliedro representado na figura que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.

Sabe-se que:

- o vértice O do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice E do poliedro tem coordenadas (2, 2, 2);
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.



a) Escreva uma equação vectorial da recta paralela à recta GP e que contém o ponto F.

b) Determine, com aproximação à décima de grau, o ângulo que a recta AG faz com a recta CP.

c) Determine as coordenadas de um vector perpendicular a $\overrightarrow{AF}$ e de norma 10.

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas	Volumes
Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$ Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$ Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$ Círculo: πr^2	Prisma: $Área\ da\ base \times Altura$ Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$ Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$ Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$ Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
	5	45					

2.ª Parte .... 155 pontos

1. .... 58 pontos
   - a) 16
   - b) 12
   - c) 14
   - d) 16

2. .... 18 pontos

3. .... 20 pontos
   - a) 8
   - b) 12

4. .... 27 pontos
   - a) 12
   - b) 15

5. .... 32 pontos
   - a) 8
   - b) 12
   - c) 12

Total **200 pontos**