# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Prova Escrita de Matemática

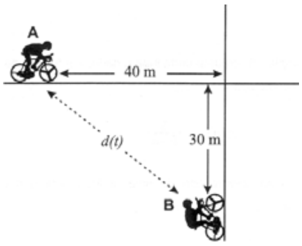
**07/06/2004** **Turmas A e B - Prova 1** **11.º Ano**

*Nome:* ______________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

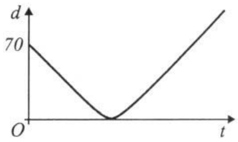
# 1.ª Parte

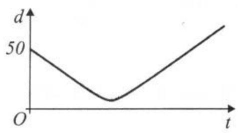
*Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.*
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

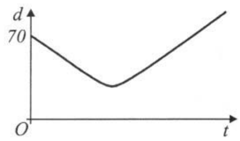
**1.** Na figura estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente.
No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento.
Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.

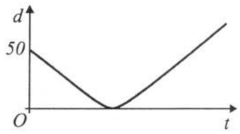



Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de *t*, dá a distância $d(t)$ entre os dois ciclistas, no instante *t* ?

**[A]** 

**[B]** 

**[C]** 

**[D]** 

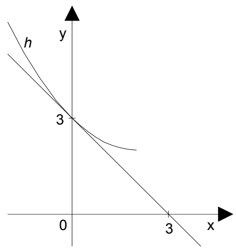

**2.** Num referencial o. n. *Oxyz*, considere:

- a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$
- o plano de equação $z = 4$

Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

**[A]** $\pi$ **[B]** $3\pi$ **[C]** $6\pi$ **[D]** $9\pi$

**3.** Na figura está representada parte do gráfico de uma função *h*, de domínio *IR*, bem como parte da recta tangente ao gráfico de *h*, no ponto $(0, 3)$.
Esta recta intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 3.




Qual das expressões seguintes pode definir *h'*, função derivada de *h* ?

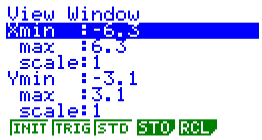
**[A]** $\frac{x}{2} - 1$ **[B]** $2 - \frac{x}{3}$

**[C]** $1 - \frac{x}{2}$ **[D]** $\frac{x}{3} - 2$

**4.** Qual é o limite da sucessão definida por $u_n = \frac{1 - 3n^2}{6n^2 + 5}$ ?

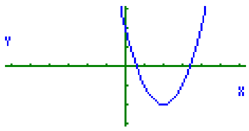
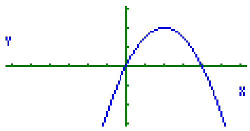
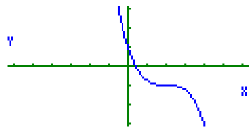
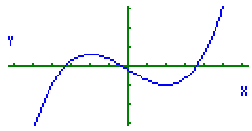
**[A]** $+\infty$ **[B]** $\frac{1}{6}$ **[C]** $-\frac{1}{2}$ **[D]** $-\infty$

5. Uma dada função *h*, polinomial de grau inferior a quatro, satisfaz as seguintes condições:




- a taxa média de variação no intervalo $[0,2]$ é negativa;
- admite inversa (isto é, existe $h^{-1}$);
- existe pelo menos um $x_0 \in IR$, tal que $h'(x_0) = 0$ ($h'$ designa a função derivada de *h*)

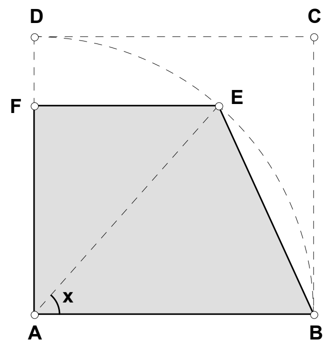
Das funções abaixo representadas graficamente, a única que satisfaz as três condições é:

[A]  [B]  [C]  [D] 

# 2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEF]. Tem-se que:




- [ABCD] é um quadrado de lado 2
- BD é um arco de circunferência de centro em A;
  o ponto E move-se ao longo deste arco;
  em consequência, o ponto F desloca-se sobre o segmento [AD], de tal forma que se tem sempre [EF] $\perp$ [AD]
- *x* designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAE ( $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ )

**a)** Mostre que a área do polígono [ABEF] é dada, em função de *x*, por:

$$A(x) = 2\,sen\ x + sen\ (2x)$$

**NOTA**: Tenha em consideração que $sen\ (2x) = 2\,sen\ x \cdot \cos x$ e que $B\hat{A}E = A\hat{E}F$ (Porquê?).

**b)** Diga para que valor tende $A(x)$ quando $x \to \frac{\pi}{2}^-$ e interprete geometricamente esse valor.

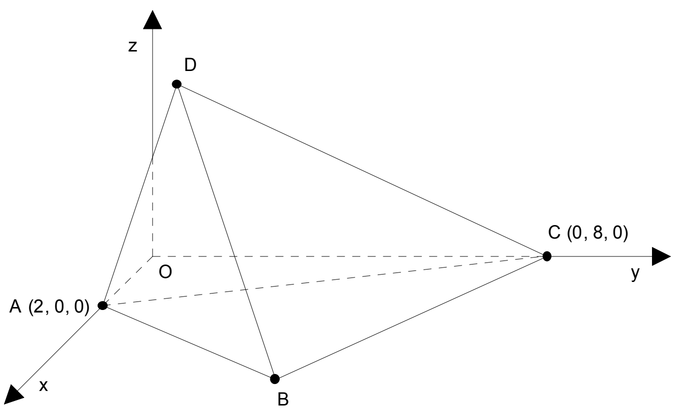
**c)** Aprenderá mais tarde que, para encontrar o valor de *x* que torna a área máxima, terá de resolver a equação:

$$2\cos\ x + 2\cos\ (2x) = 0$$

**c1)** Resolva-a, determine aquele valor de *x* e encontre o valor máximo da área.

**c2)** Recorrendo à sua calculadora, verifique os valores que determinou na alínea anterior.
Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou.

2. No referencial ortonormado (*O, x, y, z*), considere a pirâmide [ABCD]. Tem-se que:




- $\vec{CB} = (5, -3, 0)$
- $\vec{CD} = (1, -7, 4)$
- *A* (2, 0, 0) e *C* (0, 8, 0).

**a)** Determine a amplitude do ângulo CDA, com aproximação à décima de grau.

**b)** Mostre que o vector $\vec{n} = (3, 5, 8)$ é normal ao plano BCD e determine uma sua equação cartesiana.

**3.** Um objecto move-se ao longo de uma recta e a sua distância, em *centímetros*, a um ponto de referência fixo é dada em função do tempo *t*, em *segundos*, por

$$d(t) = 2t + \frac{8}{t+1}\,, \quad \text{com } t \geq 0\,.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva as três alíneas seguintes.

**a)** Determine o período de tempo durante o qual o objecto distou do ponto de referência 15 cm ou menos?

**b)** Prove que a taxa média de variação de *d* no intervalo $[1, 3]$ é $1$.
Interprete este valor no contexto da situação descrita.

**c)** Sabe-se que $d'(t) = 2 - \frac{8}{(t+1)^2} = \frac{2(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$. ($d'$ designa a derivada de $d$)
Verifique se a função *d* tem um mínimo absoluto e, em caso afirmativo, determine-o.

**4.** Considere as funções *f*, *g* e *h*, de domínios $D_f = ]-\infty, 9]$, $D_g = IR \setminus \{-1\}$ e $D_h = IR$, assim definidas:

$$f(x) = -5 + \sqrt{9-x} \qquad g(x) = \frac{3x-2}{x+1} \qquad h(x) = x - 2$$

**a)** Determine os valores de *x* para os quais $f(x) = h(x)$.

**b)** Calcule $(f \circ h')(-1)$, sendo *h'* a função derivada de *h*.

**c)** Caracterize $g^{-1}$, função inversa de *g*.

**5.** Considere as sucessões, assim definidas:

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -2 + u_n\,,\ \forall n \in IN \end{cases} \qquad v_n = \frac{5}{2^n} \qquad \text{e} \qquad w_n = 2n^2 - 4$$

**a)** Mostre que a sucessão $(u_n)$ é monótona e determine uma expressão do seu termo geral.

**b)** Prove que a sucessão $(v_n)$ é uma progressão geométrica decrescente.
Calcule a soma dos seus primeiros 20 termos, indicando o resultado com aproximação às milionésimas.

**c)** Pelos teoremas sobre infinitamente grandes e sobre infinitésimos, mostre que $v_n \to 0$ e que $w_n \to +\infty$.

**NOTA**: Para facilitar a resolução, pode referenciar os teoremas por $T_1$, $T_2$, ... $T_8$, conforme o seu manual.

## FIM

# Formulário

| Áreas | Volumes |
|---|---|
| Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$ | Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura* |
| Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$ | Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura* |
| Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema* | Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura* |
| Círculo: $\pi r^2$ | Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura* |
| Superfície esférica: $4\pi r^2$ | Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ |

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** .................................................................................................................. 45 pontos

Cada resposta certa ............................................... +9 pontos

Cada resposta errada ............................................ -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada ................ 0 pontos

***Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.***

| | | ERRADAS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| CERTAS | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 9 | 6 | 3 | 0 | 0 | |
| | 2 | 18 | 15 | 12 | 9 | | |
| | 3 | 27 | 24 | 21 | | | |
| | 4 | 36 | 33 | | | | |
| | 5 | 45 | | | | | |

**2.ª Parte** .................................................................................................................. 155 pontos

1. ................................................................................................. 38 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b) ........................................................................................ 8
   - c1) ...................................................................................... 12
   - c2) ...................................................................................... 8

2. ................................................................................................. 27 pontos
   - a) ........................................................................................ 13
   - b) ........................................................................................ 14

3. ................................................................................................. 31 pontos
   - a) ........................................................................................ 15
   - b) ........................................................................................ 8
   - c) ........................................................................................ 8

4. ................................................................................................. 27 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b) ........................................................................................ 7
   - c) ........................................................................................ 10

5. ................................................................................................. 32 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b) ........................................................................................ 12
   - c) ........................................................................................ 10

**Total** **200 pontos**