Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática A

01/06/2011 **Turma A - Prova 2** **11.º Ano**

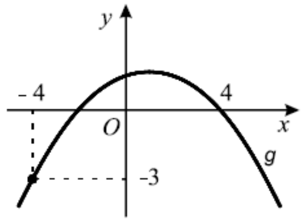
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 8 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.*

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g .
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=|x|$.

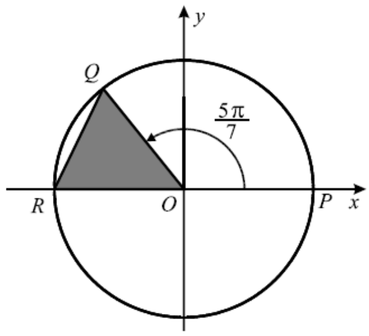
Qual é o valor de $(g\circ f)(-4)$?



[A] -3 **[B]** 0
[C] 3 **[D]** 4

2. Na figura está representado o círculo trigonométrico.
Tal como a figura sugere:

- O é a origem do referencial;
- Q pertence à circunferência;
- P é o ponto de coordenadas $(1,0)$;
- e R é o ponto de coordenadas $(-1,0)$.

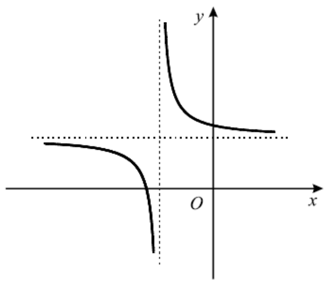


A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo [OQR]?

[A] $0,49$ **[B]** $0,46$ **[C]** $0,42$ **[D]** $0,39$

3. Para um certo valor de a e para um certo valor de b , a expressão $f(x)=a+\frac{1}{x+b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



[A] $a<0$ e $b<0$ **[B]** $a>0$ e $b<0$
[C] $a<0$ e $b>0$ **[D]** $a>0$ e $b>0$

4. Seja C o centro de uma esfera de diâmetro [AB] com comprimento 6.

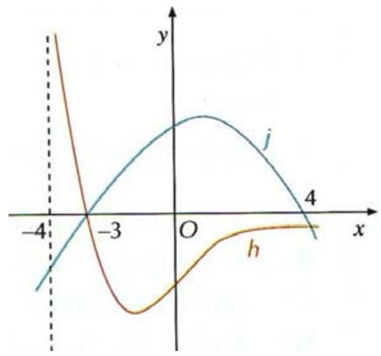
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$?

[A] -36 **[B]** $9\sqrt{2}$ **[C]** -9 **[D]** $-6\sqrt{2}$

5. Na figura encontram-se representadas graficamente as funções h e j, de domínios $]-4,+\infty[$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

As rectas de equação $x=-4$ e $y=0$ são assímptotas do gráfico de h.

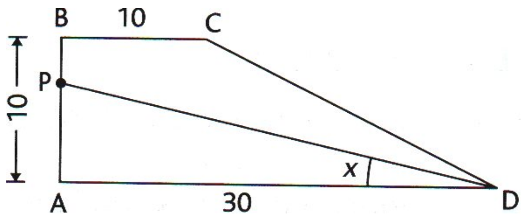
O conjunto dos zeros de $\dfrac{h}{j}$ é:



[A] $\{-3\}$ **[B]** $\{-3,4\}$

[C] $\{4\}$ **[D]** $\{\ \}$

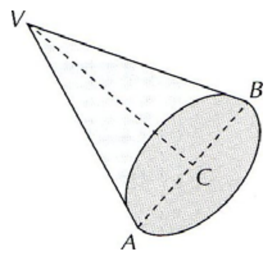
6. Na figura está representado um trapézio rectângulo [ABCD], cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.
Considere que um ponto P se desloca sobre o lado [AB].
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA.
Pretende-se determinar o valor de x para o qual [PD] divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.



Qual das equações seguintes traduz este problema?

[A] $\dfrac{30^2 tg\,x}{2}=100$ **[B]** $\dfrac{30\times 10\,tg\,x}{4}=150$ **[C]** $\dfrac{30^2 sen\,x}{2}=100$ **[D]** $\dfrac{30\times 10\,sen\,x}{4}=150$

7. Na figura está representado um cone recto, sendo V o vértice e C o centro da base.
Num referencial o.n. Oxyz, as coordenadas dos pontos referidos são $C(1,1,2)$ e $V(9,5,2)$.



Uma equação do plano que contém a base do cone é:

[A] $x-z=-1$ **[B]** $2x+y=3$

[C] $3x-2z=0$ **[D]** $-5x-y+3z=0$

8. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n=1-u_n$.

Qual é o valor para que tende (v_n)?

[A] $-e$ **[B]** 0 **[C]** $1-e$ **[D]** e

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

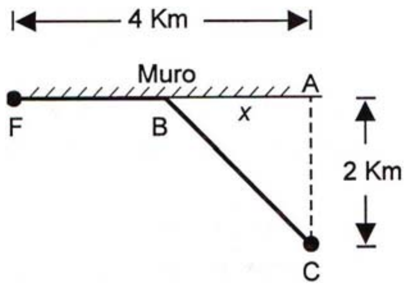
1. Um computador regista a distância de uma sonda em relação a um ponto **durante três minutos**.
A partir dos registos obtidos, foi construído o seguinte modelo matemático:

$$d(t)=-t^3+5t^2-7t+4$$

em que $d(t)$ é expresso em metros e t em minutos.

Durante o intervalo de tempo de observação, determine, por **processos exclusivamente analíticos**, os instantes em que a sonda esteve mais próxima e mais afastada do ponto de referência, assim como a distância ao ponto nesses instantes.

2. Pretende-se ligar uma fábrica F a uma central de tratamento de resíduos C, por meio de uma conduta, conforme a figura.



Tal como a figura sugere:

- A conduta deve seguir ao longo de um muro, até um certo ponto B, e daí deve seguir em linha recta até à central de tratamento;
- Designou-se por A o ponto do muro mais próximo da central de tratamento;
- A distância da fábrica ao ponto A é 4 km e a distância deste ponto à central é 2 km;
- Designou-se por x a distância entre A e B (em quilómetros).

O preço de colocação da conduta é:

- três mil euros por quilómetro, ao longo do muro;
- cinco mil euros por quilómetro, do muro à central de tratamento.

a) Mostre que o preço de colocação da conduta, em **milhares de euros**, é dado, em função de x, **em quilómetros**, por:

$$p(x) = 12 - 3x + 5\sqrt{x^2 + 4} \text{ , com } x \in \left]0,4\right[$$

b) Determine o(s) valor(es) de x para o(s) qual(ais) o preço de colocação da conduta é de 22 mil euros.

c) Seja q a função afim definida por $q(x) = 3x - 12$.
Seja $r = p + q$.

Sendo r^{-1} a função inversa da função r, mostre que:

$$r^{-1}: \left]10, 10\sqrt{5}\right[\to \left]0,4\right[$$
$$x \to \frac{\sqrt{x^2 - 100}}{5}$$

Sugestão: Poderá ser útil reparar que a função r é contínua e estritamente crescente.

3. Um atleta, após uma lesão, iniciou um programa de recuperação física que consistia no seguinte:

- No 1.º dia é feito um certo exercício durante 10 minutos;
- Nos dias seguintes, há um acréscimo de 4 minutos ao tempo dedicado ao exercício no dia anterior.

Considere a sequência dos tempos gastos, em cada dia, pelo atleta no exercício.

a) Mostre que uma expressão do termo geral da sucessão (t_n) que modela a situação é $t_n = 4n + 6$.

b) O atleta iniciou o programa de recuperação no passado dia **3 de Maio**.
Supondo que o programa de recuperação terminou ontem, dia **31 de Maio** (inclusive), quantas horas e minutos dedicou, no total, o atleta ao exercício.

4. Considere as sucessões, assim definidas: $u_n = \dfrac{4-n}{3n}$ $\quad v_n = \dfrac{5}{2^n}$ $\quad w_n = \dfrac{1}{n^2+5}$

a) Mostre que a sucessão (u_n) é limitada.

Sugestão: Poderá ser útil começar por mostrar que a sucessão é monótona.

b) Calcule a soma dos primeiros 20 termos da sucessão (v_n), indicando o resultado com aproximação às milionésimas.

c) Recorrendo às propriedades sobre infinitamente grandes e sobre infinitésimos, mostre que a sucessão (w_n) é um infinitésimo.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte			64 pontos
Cada questão com resposta certa		8 pontos	
Cada questão com resposta errada, não respondida ou anulada		0 pontos	
2.ª Parte			136 pontos
1.		20 pontos	
2.		50 pontos	
a)	16		
b)	17		
c)	17		
3.		26 pontos	
a)	12		
b)	14		
4.		40 pontos	
a)	16		
b)	14		
c)	10		
		Total	**200 pontos**

Formulário

Áreas de figuras planas	**Volumes**
Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*
Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$	Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*
Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*	Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*
Círculo: πr^2	Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*
	Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$

T1	Se $u_n \to +\infty$ e, a partir de uma certa ordem, $v_n \geq u_n$, então $v_n \to +\infty$.
T2	Se (v_n) é um infinitésimo e se, depois de uma certa ordem, $\lvert u_n \rvert \leq \lvert v_n \rvert$, então também (u_n) é um infinitésimo.
T3	Se (u_n) é um infinitamente grande e $u_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitésimo.
T4	Se (v_n) é um infinitésimo e $v_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ é um infinitamente grande.