

Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

19/11/98

Turma A - Provas 1 e 2

11.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

| | 1 ⁽¹⁾ | 2 ⁽²⁾ | 3 ⁽³⁾ | 4 ⁽⁴⁾ | 5 ⁽⁵⁾ |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Prova 1 | A | A | C | D | C |
| Questão | 3 | 4 | 1 | 5 | 2 |
| Prova 2 | H | G | F | E | H |

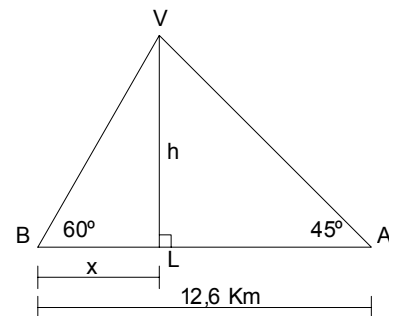
2.ª Parte

1. De acordo com os elementos da figura ao lado, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}60^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg}45^\circ = \frac{h}{12,6 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{h}{\operatorname{tg}60^\circ} \\ 12,6 - x = \frac{h}{\operatorname{tg}45^\circ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{h}{\sqrt{3}} \\ x = 12,6 - \frac{h}{1} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{h}{\sqrt{3}} = 12,6 - h &\Leftrightarrow h \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) = 12,6 \\ \Leftrightarrow h &= \frac{12,6}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1} \end{aligned}$$



Sendo, então, $h = 7,988$ (3 c.d.).

Valdigem e Lazarim distam aproximadamente 8,0 quilómetros.

2.

a) Ora, $0,5 \times 0 = 0$ e $0,5 \times 24 = 12$.

Portanto, $0 \leq 0,5 \times t \leq 2\pi$ para $t \in [0, 24]$. Consequentemente, $\operatorname{sen}(0,5 \times t)$ assume todos os valores do intervalo $[-1, 1]$.

Assim, $p_{\text{mínima}} = 5 + 2,5 \times (-1) = 2,5$ e $p_{\text{máxima}} = 5 + 2,5 \times 1 = 7,5$.

Nesse dia, a profundidade mínima é 2,5 m e a profundidade máxima é 7,5 m.

b) Como

$$\begin{aligned} p(0) &= 5 + 2,5 \times \operatorname{sen}(0,5 \times 0) = 5 + 2,5 \times 0 = 5 \text{ e} \\ p(24) &= 5 + 2,5 \times \operatorname{sen}(0,5 \times 24) = 5 + 2,5 \times \operatorname{sen}(12) \approx 3,659, \end{aligned}$$

então $p(0) - p(24) \approx 1,341$.

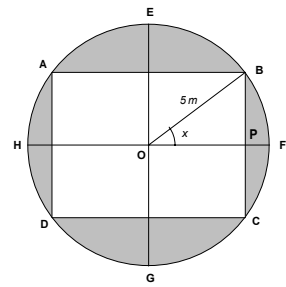
Portanto, a diferença de profundidades atingidas a essas horas é aproximadamente 1,3 metros.

3.

a) Sendo $\sin x = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}}$, então $\overline{BP} = 5 \sin x$. Sendo $\cos x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}$, então $\overline{PO} = 5 \cos x$.

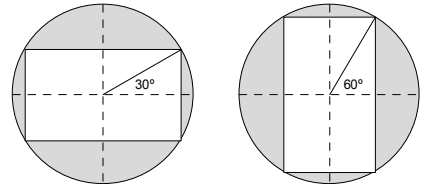
Assim,

$$\begin{aligned} r(x) &= \pi \times 5^2 - (2 \times 5 \sin x) \times (2 \times 5 \cos x) \\ &= 25\pi - 50 \times (2 \sin x \cdot \cos x) \\ &= 25\pi - 50 \sin(2x) \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned} r(x) = 25 \cdot (\pi - \sqrt{3}) &\Leftrightarrow 25\pi - 50 \sin(2x) = 25 \cdot (\pi - \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow 25\pi - 50 \sin(2x) = 25\pi - 25\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Como $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, existem dois valores distintos, $x_1 = \frac{\pi}{6}$ e $x_2 = \frac{\pi}{3}$ para os quais a área da zona relvada é

$25 \cdot (\pi - \sqrt{3}) \text{ m}^2$. (Obtém-se uma das situações a partir da outra por uma rotação de 90° de centro em O - ver figura acima.)

c) *Por exemplo:* Trabalhando no sistema circular, definiu-se a função r e considerou-se $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right] \times [0, 40]$ para janela de visualização. Usando o comando *Trace* procurou-se o valor requerido, tendo-se obtido os seguintes valores: $x = 0,665$ e $y = 29,986$.

4. Como sabemos, $\text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, logo, sendo $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$, é $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+4^2}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Sendo $\text{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, então é $\sin \alpha = -4 \times \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Assim, $\cos(\pi + \alpha) - 2 \sin(\pi - \alpha) = -\cos \alpha - 2 \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17} + 8 \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{9\sqrt{17}}{17}$.

FIM

(1) $n_{\text{água, ar}} = \frac{\sin 30^\circ}{\frac{81}{\sqrt{81^2 + 200^2}}} \approx 1,33$.

(2) A afirmação «O co-seno de um ângulo pode ser $\frac{5}{\sqrt{5}}$ » é falsa, pois $\frac{5}{\sqrt{5}} > 1$.

A afirmação «Para qualquer ângulo α verifica-se que: $\sin(\alpha - \pi) = \sin(\alpha + \pi)$ » é verdadeira, pois $\sin(\alpha - \pi) = \sin(\alpha - \pi + 2\pi) = \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.

A afirmação «Para um ângulo do segundo quadrante o seno é sempre maior do que o co-seno.» é verdadeira (confirme no círculo trigonométrico).

A afirmação «A tangente de um ângulo pode ser π^2 » é verdadeira, pois $\text{tg} x \in \mathbb{R}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(3) $\frac{\cos x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos x + \cos x}{\sin x + \sin x} = \frac{2 \cos x}{2 \sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\text{tg} x}$.

(4) Ora, $\text{tg}(4\pi + x) < 0 \Leftrightarrow \text{tg} x < 0$. Por outro lado, $\cos(-x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0$. Portanto, (visualizando o círculo trigonométrico) $x \in 4.^\circ \text{Q}$.

(5) Quando x assume todos os valores do intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\sin x$ assumirá todos os valores do intervalo $[-1, 0]$. Portanto, os valores de k terão de satisfazer a condição $-1 \leq k^2 \leq 0$, cujo conjunto-solução é um conjunto singular: $\{0\}$.

O Professor