

# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

13/05/99

Turma A - Provas 1 e 2

11.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

	1 <sup>(1)</sup>	2 <sup>(2)</sup>	3 <sup>(3)</sup>	4 <sup>(4)</sup>	5 <sup>(5)</sup>
<b>Questão</b>	1	2	3	4	5
<b>Prova 1</b>	B	D	C	D	D
<b>Questão</b>	5	3	1	2	4
<b>Prova 2</b>	G	F	F	E	G

### 2.ª Parte

1.

- a) Por observação do gráfico, conclui-se que o ciclista B demorou 24 s a percorrer a descida de 400 metros. Vejamos quanto tempo demorou o ciclista A:

$$d(t) = 400 \Leftrightarrow 0,4t^2 + 6t - 400 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-6 \mp \sqrt{36 + 640}}{0,8} \Leftrightarrow t = \frac{-6 \mp 26}{0,8} \Leftrightarrow t = -40 \vee t = 25$$

Portanto o ciclista A demorou 25 s a percorrer a mesma distância.

Como os ciclistas iniciam a descida ao mesmo tempo, conclui-se que o ciclista B chegou primeiro ao fim da mesma.

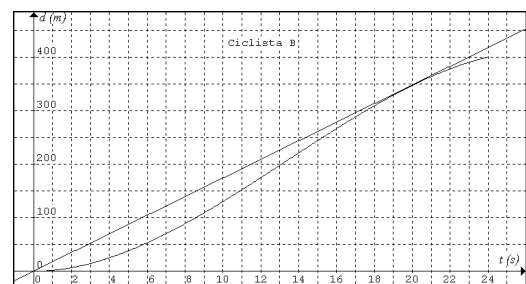
Nesse percurso de 400 metros, as respectivas velocidades médias em m/s são:  $v_{mA} = \frac{400}{25} = 16$  e

$$v_{mB} = \frac{400}{24} = 16,6 \text{ . Reduzindo a Km/h, temos } v_{mA} = 16 \times \frac{3600}{1000} = 57,6 \text{ e } v_{mB} = \frac{400}{24} \times 3,6 = 60 \text{ .}$$

- b) A velocidade nesse instante é a taxa de variação da função  $d$  para  $t = 20$  segundos, que sabemos corresponder ao declive da recta tangente ao gráfico de  $d$  nesse ponto. Assim, desenhando essa recta o mais aproximadamente possível, concluímos que passa nos pontos de coordenadas (20, 350) e (0, 0), pelo que o seu

declive é  $m = \frac{350}{20} = 17,5$  . Portanto a velocidade pedida

é aproximadamente  $v = 17,5 \times 3,6 = 63$  Km/h.



- c1) Sendo  $x_0 \in [0,25]$  e  $h > 0$ , temos :

$$\begin{aligned} tmv_{[x_0, x_0+h]} &= \frac{0,4(x_0 + h)^2 + 6(x_0 + h) - 0,4x_0^2 - 6x_0}{h} \\ &= \frac{0,4x_0^2 + 0,8x_0h + 0,4h^2 + 6x_0 + 6h - 0,4x_0^2 - 6x_0}{h} \\ &= \frac{0,8x_0h + 0,4h^2 + 6h}{h} \\ &= 0,8x_0 + 0,4h + 6 \end{aligned}$$

Quando a amplitude do intervalo tender para zero, isto é, quando  $h \rightarrow 0$ , virá  $tmv_{[x_0, x_0+h]} \rightarrow 0,8x_0 + 6$  .

Ou seja,  $tv(x_0) = d'(x_0) = 0,8x_0 + 6$  e, portanto,  $v(t) = 0,8t + 06$ , c.q.m..

c1) Como sabemos,  $a(t) = v'(t) = 0,8$ .

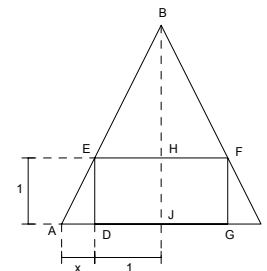
Portanto, nesse percurso de 400 metros, a aceleração do ciclista **A** foi constante e igual a  $0,8 \text{ m/s}^2$ .

2.

a) Tendo em consideração a sugestão, é  $\frac{BH}{ED} = \frac{EH}{AD}$ , donde  $\frac{BH}{1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow BH = \frac{1}{x}$ .

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = A_{[DEFG]} + 2 \times A_{[ADE]} + A_{[BEF]} = 2 \times 1 + 2 \times \frac{x \times 1}{2} + \frac{2 \times \frac{1}{x}}{2} = 2 + x + \frac{1}{x}.$$

Logo,  $a(x) = 2 + x + \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ), como se pretendia.



c) (Note que  $x^2 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  e tenha em consideração o sinal da função quadrática  $x \rightarrow x^2 - 1$  (negativa entre os zeros))

A área mínima do triângulo [ABC] é 4 unidades de área, sendo obtida para  $x = 1$ .

Quando  $x \rightarrow 0^+$  ou  $x \rightarrow +\infty$ , então  $a(x) \rightarrow +\infty$ .

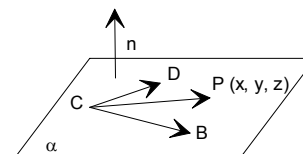
Portanto, quando  $x$  varia no intervalo  $]0, +\infty[$ , a área do triângulo considerado decresce desde um valor infinitamente grande até ao valor mínimo 4 (para  $x = 1$ ), passando depois a crescer, atingindo novamente valores infinitamente grandes. (Desloque mentalmente o ponto A ao longo da semi-recta DA)

$x$	0		1	$+\infty$
$a'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$		-	0	+
$a(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$

3.

a) Designado por  $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$  um vector genérico normal ao plano BCD ( $\alpha$ ), será:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (5, -3, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -7, 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ a - 7b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5}b \\ 32b - 20c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5}b \\ c = \frac{32}{20}b \end{cases}$$



Assim,  $\vec{n} = (3, 5, 8)$  (por exemplo, para  $b = 5$ ) é um vector normal ao plano BCD.

Designado  $P(x, y, z)$  um ponto genérico do plano, os vectores  $\vec{CP}$  e  $\vec{n}$  são perpendiculares, logo:  
 $(x - 0, y - 8, z - 0) \cdot (3, 5, 8) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y - 40 + 8z = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y + 8z = 40$ .

Portanto,  $3x + 5y + 8z = 40$  é uma equação cartesiana do plano BCD.

b) Sendo  $\vec{B} = \vec{C} + \vec{CB} = (0, 8, 0) + (5, -3, 0) = (5, 5, 0)$ , então  $\vec{BA} = (-3, -5, 0)$ .

Como  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3, -5, 0) \cdot (-5, 3, 0) = 15 - 15 + 0 = 0$ , então  $\hat{A}BC = 90^\circ$ , c.q.m..

O volume da pirâmide [ABCD] é  $V = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times \overline{DD'} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{34} \times \sqrt{34}}{2} \times 4 = \frac{68}{3}$  unidades de volume.

NOTA:  $D'$  é a projecção ortogonal do ponto D sobre o plano coordenado xOy.

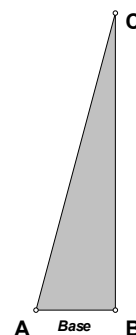
4. Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$4 = 2 \times \sqrt{\frac{19,6}{9,8 \times \sin(2\alpha)}} \Leftrightarrow 4 = 2 \times \sqrt{\frac{2}{\sin(2\alpha)}} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{\frac{8}{\sin(2\alpha)}}.$$

Portanto,  $\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}$ .

Como o ângulo  $\alpha$  é agudo, vem  $2\alpha = 30^\circ$  e, portanto,  $\alpha = 15^\circ$ .  
 Mas, há outra solução:  $2\alpha = 150^\circ$  e, portanto,  $\alpha = 75^\circ$ .

Parece impossível, mas é verdade!  
 Está a faltar observar um pormenor importante.  
 Repare na figura ao lado que é bastante esclarecedora sobre a falha.



Distância percorrida= 7.6

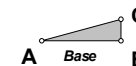
$$t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin(2 \cdot x)}} = 4.0$$

$x = 75.0^\circ$

Distância percorrida= 2.0

$$t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin(2 \cdot x)}} = 4.0$$

$x = 15.1^\circ$



5.

- a)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x(4-x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 4x \geq 0\} = [0, 4]$ .  
(tenha em consideração a variação do sinal da função quadrática)

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(1 + \frac{3}{1+2}\right) = f(2) = \sqrt{2 \times 2} - 2 = 0.$$

- b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 4x} = x \Rightarrow -x^2 + 4x = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ .

Verificação:

$$\sqrt{0 \times 4} - 0 = 0 \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

$$\sqrt{2 \times 2} - 2 = 0 \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

Portanto,  $f$  tem dois zeros:  $x = 0$  ou  $x = 2$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2+3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x+5 = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -5$$

A função  $g$  apenas tem um zero:  $x = -5$ .

- c) Ora,  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  e  $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  (este último, do que sabemos do estudo da função do tipo  $y = a + \frac{b}{x-c}$ ).

$$\text{Por outro lado, } y = 1 + \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow y = \frac{x+5}{x+2}, \text{ donde } y(x+2) = x+5 \Leftrightarrow x(y-1) = 5-2y. \text{ Logo, } x = \frac{5-2y}{y-1}.$$

Assim,

$$g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$x \rightarrow \frac{5-2x}{x-1}$$

**FIM**

- 
- (1) Como  $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(2) = 1$  podemos eliminar três dos gráficos. Se preferir, dado que  $f(x) = x - 1$ , o gráfico de  $f \circ g$  pode ser obtido do gráfico de  $g$  por uma translação associada ao vector  $\vec{u} = (-1, 0)$ .
- (2) Num referencial cartesiano, anote as informações prestadas sobre a função e conclua sobre a veracidade de cada uma das afirmações.
- (3) No momento da maré-alta será máxima a distância desse ponto do casco ao fundo do mar. Como o valor mínimo de  $\cos(2x)$  é  $-1$ , como sabemos, então  $h(x)_{\text{máx}} = 10 - 3 \times (-1) = 13$ .
- (4) Para que a recta seja paralela ao plano, um vector director da recta terá de ser perpendicular a um vector normal ao plano. Assim,  $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (2, m, 1) \cdot (2, -1, -2) = 0 \Leftrightarrow 4 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ .
- (5) Considere o gráfico de  $f$ , interprete graficamente a derivada de uma função num ponto e conclua a não existência de  $f'(2)$ , por as derivadas laterais serem de sinais contrários.

O Professor