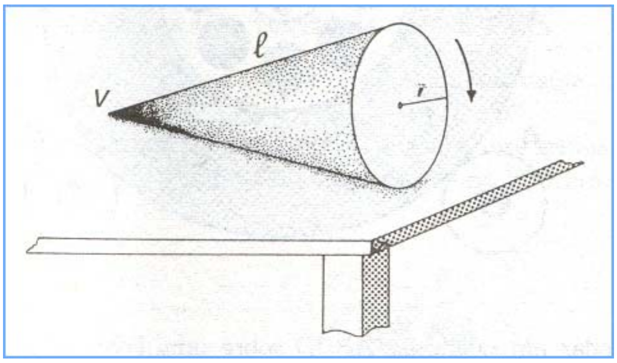
Escola Secundária da Sé-Lamego

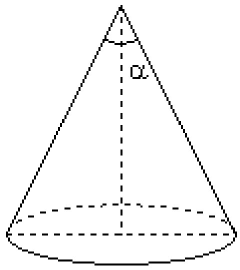
Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 — ***Trigonometria – 1 (Revisões)*** — **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ____

1. Um cone, cuja base tem raio ***r*** e cuja geratriz tem comprimento ***l***, roda sobre uma superfície horizontal e plana.





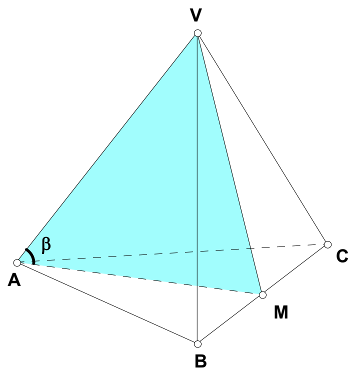
α é ângulo do cone

a) Descreva o que acontece com o cone.

b) Sabendo que o cone retorna ao ponto de partida, depois de ter efectuado duas revoluções completas em torno do seu eixo de simetria, qual é a amplitude do ângulo do cone?

2. Pretende-se saber o ângulo que a aresta lateral de um tetraedro regular faz com o plano da base. Para isso, considerou-se a secção produzida nesse tetraedro pelo plano AMV, onde M é o ponto médio da aresta [BC].

Determine a amplitude do ângulo considerado (com aproximação à décima de grau), sabendo que a aresta do tetraedro tem 2 centímetros de comprimento.



3. Mostre que:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3.tg\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$

b) $1 - \cos^2 x + \frac{sen^2 x}{tg^2 x} = 1$, para os valores em que a expressão tem significado.

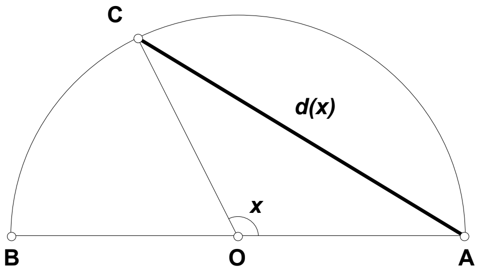
4. Simplifique a expressão: $2.sen\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(7\pi + x) - tg\left(\frac{13\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

5. Sabendo que $sen(\pi + x) = -\frac{3}{7}$ e que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, determine o valor exacto de $tg(\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Determine, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de k para os quais:

$$tg\ x = k^2 - 3 \quad \wedge \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

7. Um ponto C desloca-se sobre uma semicircunferência de diâmetro [AB] e centro O.



Considere que o comprimento do segmento [AC], em função da amplitude *x* do ângulo AOC, é dado por

$$d(x) = 2.sen\,\frac{x}{2}\ ,\quad x \in [0, \pi]$$

a) Indique o valor de *x* para o qual $d(x) = \overline{AB}$.
Justifique que a semicircunferência tem raio 1.

b) Justifique que, quando $x \in]0, \pi[$, o triângulo [ABC] é rectângulo em C.

Mostre que $\overline{BC} = 2.\cos\frac{x}{2}$.

Nota: Recorde que a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os lados desse ângulo.

c) Verifique que a área do triângulo [ABC] é dada por $A(x) = sen\ x$.
Justificando, indique o valor de *x* para o qual é máxima a área do triângulo.

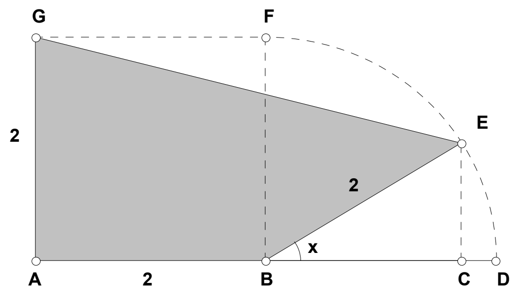
Nota: Tenha em consideração a relação seguinte: $sen\ (2\alpha) = 2.sen\ \alpha.\cos\ \alpha$.

d) Mostre que o perímetro do triângulo [ABC] é dado por $P(x) = 2.(1 + sen\,\frac{x}{2} + \cos\,\frac{x}{2})$.

Utilizando as potencialidades da calculadora gráfica, determine o valor de *x* para o qual é máximo o perímetro do triângulo, assim como o valor desse perímetro. (aproximação às centésimas) (Note que $x \in]0, \pi[$)
Ilustre a resolução com um ou mais gráficos e descreva os procedimentos que efectuou.

Considere agora que $x \in]0°, 180°[$. Repita a questão colocada no parágrafo anterior e, se for o caso, indique a sua suposição.

8. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEG].
Tem-se que:



- [ABFG] é um quadrado de lado 2
- FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento [BD], de tal forma que se tem sempre [EC] $\perp$ [BD].
- *x* designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

a) Mostre que a área do polígono [ABEG] é dada em função de *x*, por:

$$A(x) = 2(1 + sen\ x + \cos\ x)\ .$$

Sugestão: Pode ser-lhe útil considerar o trapézio [ACEG]. (note que este trapézio não é o polígono sombreado)

b) Determine $A(0)$ e $A(\frac{\pi}{2})$.

Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) O valor de *x* que corresponde à área máxima do polígono [ABEG] é uma solução da equação:

$$2\cos\ x - 2sen\ x = 0$$

Determine esse valor de *x* e encontre o valor máximo da área.

d) Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais a área do polígono [ABEG] é 4,3 ?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

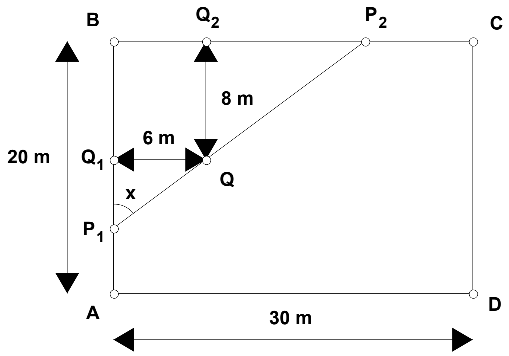
9. Sabendo que $sen\,(\pi+\alpha)=\frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, calcule $2\,tg\,(-\alpha)-sen\,(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos\,(\pi-\alpha)$.

10. Resolva as condições seguintes:

a) $sen\ x<-\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[$;

b) $tg\,(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Na figura está representado um lago artificial de forma rectangular, com 20 metros de largura e 30 metros de comprimento.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2, ($P_1 \in$ [AB] e $P_2 \in$ [BC]), tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio Q, situado a 8 m de uma das margens e a 6 m da outra.

Seja *x* a amplitude do ângulo P_2P_1B. (em radianos)

a) Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$c(x)=\frac{8\,sen\ x+6\cos\ x}{sen\ x\,.\cos\ x}$$

b) Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1}=\overline{BP_2}$. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

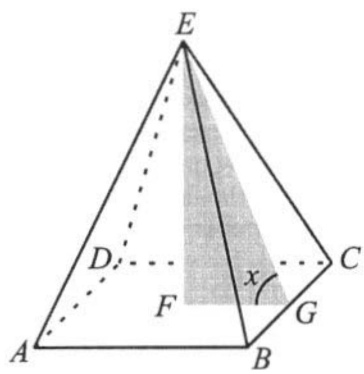
c) Determine entre que valores pode variar a amplitude do ângulo P_2P_1B.
Apresente o resultado em radianos, com arredondamento às centésimas.

d) Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais o comprimento da ponte é 25 metros?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às centésimas.

12. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se que:



- A base da pirâmide tem centro F de lado 2
- G é o ponto médio da aresta [BC]
- *x* designa a amplitude do ângulo FGE

a) Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de *x*, por

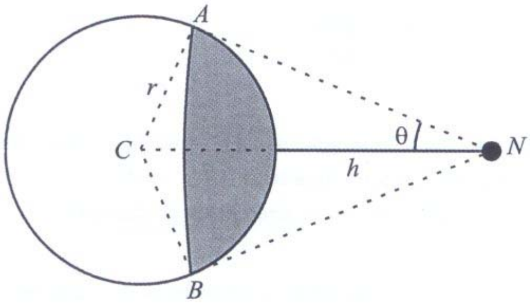
$$A(x)=\frac{4\cos x+4}{\cos x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

b) Determine o valor de *x* para o qual a área total da pirâmide é igual a 12.

c) Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução do problema da alínea anterior.

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondados às centésimas.

13. Na figura está representada a Terra e uma nave espacial *N*. Considere que a Terra é uma esfera de centro *C* e raio *r*.



A área da superfície da terra visível da nave, representada a sombreado na figura, é dada, em função do ângulo θ, por

$$f(\theta) = 2\pi r^2 (1 - sen\ \theta) \qquad \left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

a) Determine o valor de θ para o qual é visível, da nave, a quarta parte da superfície terrestre.

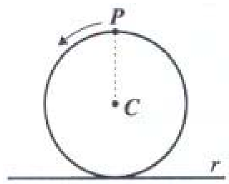
b) Designado por *h* a distância da nave à Terra (ver figura), mostre que a área da terra visível da nave é dada, em função de *h*, por $g(h) = \dfrac{2\pi r^2 h}{r+h}$.

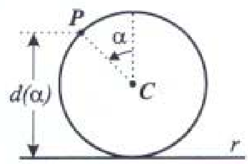
Sugestão: Tenha em conta que o ângulo CAN é recto.

c) Como facilmente reconhecerá, $g(h) = \dfrac{2\pi r^2 h}{r+h} = \dfrac{2\pi r^2}{\frac{r}{h}+1}$.

Diga para que valor tende $g(h)$ quando $h \to +\infty$ e interprete esse resultado no contexto da situação descrita.

14. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se a 2 unidade da recta r.





Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α. Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

[A] $d(\alpha) = 1 + \cos\alpha$ **[B]** $d(\alpha) = 2 + sen\,\alpha$

[C] $d(\alpha) = 1 - \cos\alpha$ **[D]** $d(\alpha) = 2 - sen\,\alpha$

15. O ângulo generalizado do 2.º quadrante <u>cujo seno</u> é igual a $\cos\dfrac{\pi}{3}$ pode ser definido por:

[A] $120° + k.360°, k \in Z$ **[B]** $135° + k.360°, K \in Z$ **[C]** $145° + k.360°, k \in Z$ **[D]** $150° + k.360°, k \in Z$

16. Um radiano é:

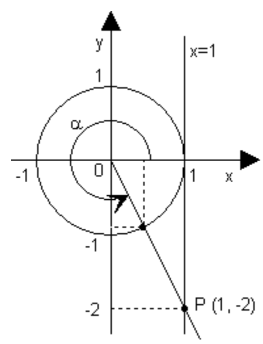
[A] a amplitude de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao diâmetro dessa circunferência.

[B] a amplitude do ângulo ao centro a que corresponde um arco de comprimento igual ao diâmetro da circunferência a que pertence

[C] a amplitude do ângulo ao centro a que corresponde um arco de comprimento igual ao raio da circunferência a que pertence.

[D] o comprimento de um arco de circunferência a que corresponde um ângulo ao centro de cerca de 57º.

17. No referencial ortonormado da figura, considere o círculo trigonométrico, a recta de equação $x = 1$ e o ângulo α. O ponto P é a intersecção do lado extremidade de α com a recta vertical considerada. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



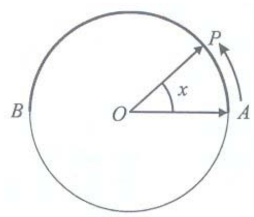
[A] $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **[B]** $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

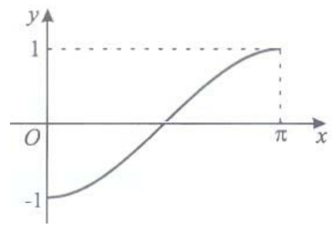
[C] $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **[D]** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

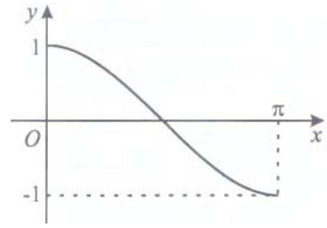
18. De um ângulo β , sabe-se que $tg\,(4\pi + \beta) > 0$ e que $\cos(-\beta) < 0$.
A que quadrante pertence β ?

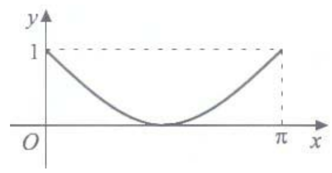
[A] 1.º quadrante **[B]** 2.º quadrante **[C]** 3.º quadrante **[D]** 4.º quadrante

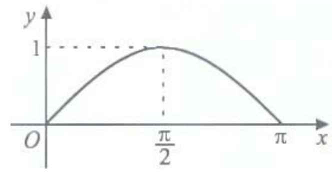
19. Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro O e raio 1.
Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.
Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B.
Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.
Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?



[A]


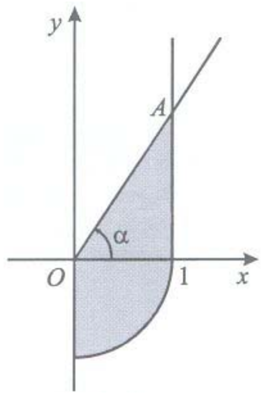
[B]


[C]


[D]


20. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo Oy , com origem no ponto $(1, 0)$
- um ponto A pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude α , cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}A$

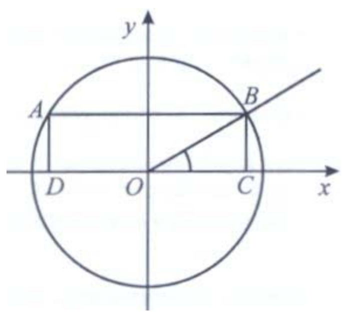


Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

[A] $\pi + \frac{2}{tg\alpha}$ **[B]** $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{tg\alpha}$

[C] $\frac{\pi}{4} + \frac{tg\alpha}{2}$ **[D]** $\pi + \frac{tg\alpha}{2}$

21. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico e um rectângulo [ABCD].
O lado [CD] está contido no eixo das abcissas.
Os vértices A e B pertencem à circunferência.
Seja α a amplitude do ângulo BOC.
A área do rectângulo [ABCD] é igual a



[A] $2.sen\ \alpha\ .\cos\ \alpha$ **[B]** $2.sen\ \alpha\ .tg\ \alpha$

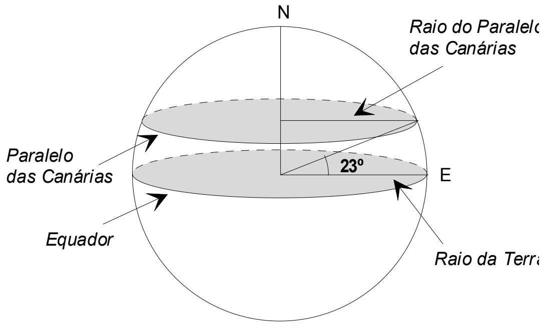
[C] $2.sen\ \alpha$ **[D]** $2.tg\ \alpha$

22. Um navio encontra-se atracado num porto.
A distância *h*, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré.
Admita que *h* é dada, em função do tempo x, por $h(x) = 10 - 3\cos(2x)$.
A distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é:

[A] 4 **[B]** 10 **[C]** 13 **[D]** 16

23. O ângulo de 23º merece atenção especial, por razões históricas, pois é o ângulo compreendido por dois raios da Terra, um terminando no Equador e outro terminando no paralelo das Canárias.
Cristóvão Colombo necessitou de calcular a razão entre os perímetros desse paralelo e do Equador, que é aproximadamente (supondo a Terra esférica):

[A] 0,95. **[B]** 0,92.
[C] 0,75. **[D]** 0,39.



Pode encontrar mais exercícios de revisão, a partir desta ligação:

http://www.prof2000.pt/users/amma/recursos_materiais/rec/rec_mat_11.htm#03-04FT

SOLUÇÕES

1.

b) $\alpha = 60^{\circ}$.

2. $\beta = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 54{,}7^{\circ}$.

4. $\sqrt{3} - 1$.

5. $\frac{21\sqrt{10} + 60}{140}$.

6. $k \in (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[)$.

8.

b) $A(0) = 4$ e $A(\frac{\pi}{2}) = 4$.

c) $x = \frac{\pi}{4}$; $A_{máx} = 2 + 2\sqrt{2}$.

d) $x = 0{,}2$ ou $x = 1{,}4$.

9. $-\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

10.

a) $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$.

b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \;\; k \in Z$.

11.

b) Aproximadamente 19,8 m.

c) $0{,}46 \leq x \leq 1{,}25$, aproximadamente.

d) $x = 1{,}12$.

12.

b) $x = \frac{\pi}{3}$.

c) $x = 1{,}05$. (que é o valor de $\frac{\pi}{3}$ aproximado às centésimas).

13.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) $g(h) \to 2\pi r^2$.

14. A

15. D

16. C

17. D

18. C

19. B

20. C

21. A

22. C

23. B

O Professor

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

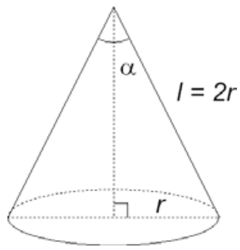
Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 *Trigonometria – 1 (Revisões)* **12.º Ano**

Proposta de Resolução:

1.

a) O cone rodando sobre uma superfície horizontal e plana, apoiando-se sucessivamente em todas as suas geratrizes, vai descrever um círculo de centro em V e raio l.

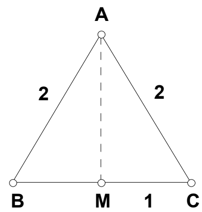


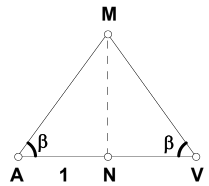
b) Como o cone retorna ao ponto de partida, depois de ter efectuado duas revoluções completas em torno do seu eixo de simetria, então o círculo referido na alínea anterior tem um perímetro que é duplo do da base do cone.

Assim, $2\pi \times l = 2\times(2\pi\times r) \Leftrightarrow l = 2r$. Logo, sendo $sen\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, é $\frac{\alpha}{2} = 30°$ e, portanto, $\alpha = 60°$.

2. Como o tetraedro é regular, as suas faces são triângulos equiláteros geometricamente iguais, sendo $\overline{VM} = \overline{AM} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$.
Considerando agora o triângulo isósceles [AVM], traçando a sua altura relativamente a [AV], temos $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\beta = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 54{,}7°$ é a amplitude do ângulo considerado.





3.

a) $\cos(\frac{\pi}{4}) - 3.tg(\frac{\pi}{6}) + sen(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\times\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$, c.q.m.

b) Ora, para os valores em que a expressão tem significado, vem:

$$1 - \cos^2 x + \frac{sen^2 x}{tg^2 x} = 1 - \cos^2 x + \frac{sen^2 x}{\frac{sen^2 x}{\cos^2 x}} = 1 - \cos^2 x + sen^2 x.\frac{\cos^2 x}{sen^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^2 x = 1\text{, c.q.m.}$$

4.

$$\begin{aligned} 2.sen(\tfrac{\pi}{3}) - \cos(7\pi + x) - tg(\tfrac{13\pi}{4}) - sen(\tfrac{\pi}{2} + x) &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(6\pi + \pi + x) - tg(3\pi + \frac{\pi}{4}) - sen(\frac{\pi}{2} - (-x)) \\ &= \sqrt{3} - \cos(\pi + x) - tg(\frac{\pi}{4}) - \cos(-x) \\ &= \sqrt{3} + \cos x - 1 - \cos x \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

5.

Ora, $sen(\pi + x) = -\frac{3}{7} \Leftrightarrow -sen\ x = -\frac{3}{7} \Leftrightarrow sen\ x = \frac{3}{7}$.

E, $A = tg(\pi - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = tg(-x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = -tg\ x + sen\ x$.

Como $x \in 2.°Q$, então $\cos x < 0$. Assim, aplicando a fórmula fundamental da trigonometria, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - (\tfrac{3}{7})^2} = -\sqrt{\tfrac{40}{49}} = -\frac{2\sqrt{10}}{7}\ .$$

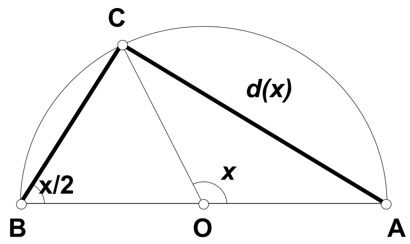
$$\text{Logo, } A = -tg\ x + sen\ x = -\frac{\frac{3}{7}}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}} + \frac{3}{7} = \frac{3}{2\sqrt{10}} + \frac{3}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{20} + \frac{3}{7} = \frac{21\sqrt{10} + 60}{140}\ .$$

6. Ora, quando $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, $tg\ x \in [1, +\infty[$.

Logo, $tg\ x = k^2 - 3 \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow k^2 - 3 \geq 1 \Leftrightarrow k^2 \geq 4 \Leftrightarrow k \in (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[)$.

(Tenha em consideração as propriedades da função quadrática)

7.



a) Ora, $d(x) = \overline{AB}$ para $x = \pi$, isto é, quando $C \equiv B$.

Como $d(\pi) = 2.sen\ \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$, então $\overline{AB} = 2$ e, portanto, a semicircunferência tem raio 1.

b) O triângulo [ABC] é rectângulo em C pois o ângulo ACB está inscrito numa semicircunferência, sendo, por isso, recto.

Ora, $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{x}{2}$, visto o ângulo inscrito ABC compreender o arco AC entre os seus lados.

Assim, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e, portanto, $\overline{BC} = 2.\cos\frac{x}{2}$, c.q.m.

c) Ora, $A(x) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{2.sen\ \frac{x}{2} \times 2.\cos\frac{x}{2}}{2} = 2.sen\ \frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = sen\ (2 \times \frac{x}{2}) = sen\ x$, c.q.m.

A área do triângulo é máxima quando $sen\ x$ for máximo ($x \in [0, \pi]$), o que acontece para $x = \frac{\pi}{2}$.

d) O perímetro do triângulo é dado por $P(x) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2 + 2.sen\ \frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} = 2.(1 + sen\ \frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})$.

Introduzida a expressão algébrica que define a função e ajustada uma janela de visualização adequada, com a função **GSolv + Max** obtiveram-se os seguintes valores: $P_{máx} \approx 4{,}83$ para $x \approx 1{,}57$ rad.

Considerando agora $x \in]0°, 180°[$, obteve-se: $P_{máx} \approx 4{,}83$ para $x \approx 90{,}00°$.

É de supor que o maximizante da área do triângulo é também maximizante do seu perímetro e, assim sendo, será $P_{máx} = 2.(1 + sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) = 2 \times (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$.

8.

a) Vamos aceitar a sugestão dada.

Ora, $sen\ x = \frac{\overline{EC}}{\overline{BE}}$, logo $\overline{EC} = 2sen\ x$; $\cos\ x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$, logo $\overline{BC} = 2\cos\ x$.

Assim, a área do polígono [ABEG] é dada em função de x , por:

$$\begin{aligned}
A[ABEG] &= A[ACEG] - A[BCE] \\
&= \frac{\overline{AG} + \overline{CE}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} \\
&= \frac{2 + 2sen\ x}{2} \times (2 + 2\cos\ x) - \frac{(2\cos\ x) \times (2sen\ x)}{2} \\
&= (1 + sen\ x) \times (2 + 2\cos\ x) - 2\cos\ x.sen\ x \\
&= 2 + 2\cos\ x + 2sen\ x + 2sen\ x.\cos\ x - 2\cos\ x.sen\ x \\
&= 2(1 + sen\ x + \cos\ x)
\end{aligned}$$

b) Ora, $A(0) = 2(1+0+1) = 4$ e $A(\frac{\pi}{2}) = 2(1+1+0) = 4$.

Para $x = 0$, o polígono sombreado é o triângulo rectângulo [ADG], cuja área é $4 = \dfrac{4 \times 2}{2}$.

Para $x = \dfrac{\pi}{2}$, o polígono sombreado é o quadrado [ABFG], cuja área é também $4 = 2 \times 2$.

c) Ora,

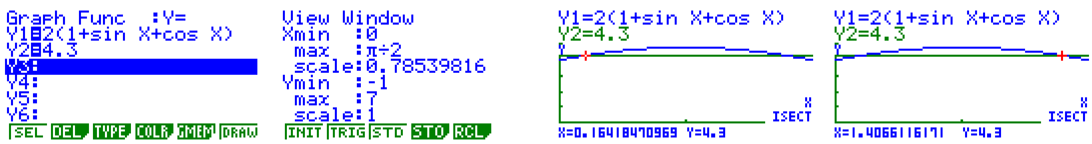
$$\begin{aligned} 2\cos x - 2\,sen\ x = 0 \;&\Leftrightarrow\; \cos x = sen\ x \\ &\Leftrightarrow\; \cos x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \\ &\Leftrightarrow\; x = \pm\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi,\ k \in Z \\ &\Leftrightarrow\; 2x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z \\ &\Leftrightarrow\; x = \tfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z \end{aligned}$$

A equação dada apenas tem uma solução no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $x = \dfrac{\pi}{4}$, que será então o maximizante da área do polígono sombreado.

O valor máximo da área é, então, $A_{máx} = 2(1 + sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) = 2(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$.

d) Pretende-se resolver a equação $A(x) = 4{,}3$ no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Para isso consideraram-se as funções y_1 e y_2 (a seguir indicadas) e, (numa janela adequada) tendo em consideração o domínio da função dada, determinaram-se as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos:



Portanto, de acordo com o arredondamento pedido, os valores desejados são: $x = 0{,}2$ ou $x = 1{,}4$.

9. Ora, $sen\,(\pi + \alpha) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -sen\ x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow senx = -\dfrac{1}{3}$.

E, $A = 2tg\,(-\alpha) - sen\,(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) + \cos\,(\pi - \alpha) = -2tg\ \alpha - \cos\alpha - \cos\alpha = -2tg\ \alpha - 2\cos\alpha$.

Dado que $\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, então $\cos\alpha > 0$.

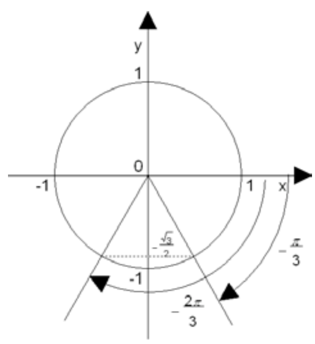
Assim, utilizando a fórmula fundamental da trigonometria, vem: $\cos\alpha = +\sqrt{1 - (-\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo, $A = -2\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} - 2 \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \underset{(3)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} - \underset{(2)}{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

10.

a) Tendo em consideração a figura ao lado, vem imediatamente

$sen\ x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge\ x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$.



b)

$$\begin{aligned} tg\,(x - \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \;&\Leftrightarrow\; x - \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k \in Z \\ &\Leftrightarrow\; x = \tfrac{\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in Z \end{aligned}$$

11.

a) Os ângulos P_2P_1B e P_2QQ_2 são geometricamente iguais, pois são ângulos de lados directamente paralelos. Considerando, sucessivamente, os triângulos rectângulos [P_1Q_1Q] e [P_2Q_2Q], vem:

$$sen\ x = \frac{6}{\overline{P_1Q}} \quad e \quad \cos\ x = \frac{8}{\overline{P_2Q}}, \text{ donde } \overline{P_1Q} = \frac{6}{sen\ x} \quad e \quad \overline{P_2Q} = \frac{8}{\cos\ x}.$$

Logo, $c(x) = \frac{6}{sen\ x} + \frac{8}{\cos\ x} = \frac{6\cos\ x}{sen\ x \,.\cos\ x} + \frac{8\,sen\ x}{sen\ x\,.\cos\ x} = \frac{8\,sen\ x + 6\cos\ x}{sen\ x\,.\cos\ x}$, c.q.m..

b) Ora, $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$ quando o triângulo rectângulo [P_1BP_2] for isósceles, logo $x = \frac{\pi}{4}$.

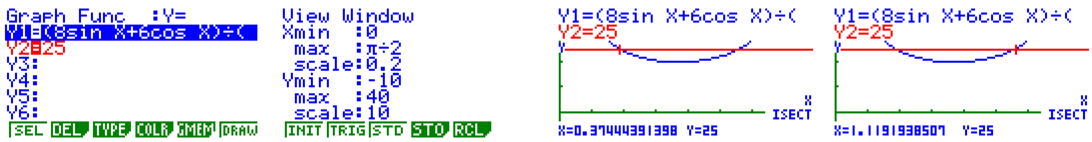
Como $c(\frac{\pi}{4}) = \frac{8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 14\sqrt{2} \approx 19{,}8$, o comprimento da ponte nessas condições é aproximadamente 19,8 m.

c) A amplitude do ângulo P_2P_1B é mínima quando os pontos P_1 e A são coincidentes; é máxima quando são coincidentes os pontos P_2 e C.

Assim, $tg\ (x_{mín}) = \frac{6}{20-8} = \frac{1}{2}$ e $tg\ (x_{máx}) = \frac{30-6}{8} = 3$, donde $x_{mín} = tg^{-1}\frac{1}{2} \approx 0{,}46$ rad e $x_{máx} = tg^{-1}3 \approx 1{,}25$ rad. Logo, $0{,}46 \le x \le 1{,}25$, aproximadamente.

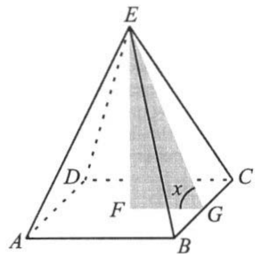
d) Pretende-se resolver a equação $c(x) = 25$ no intervalo $[0{,}46\,;1{,}25]$, aproximadamente.

Para isso consideraram-se as funções $y_1 = \frac{8\,sen\ x + 6\cos\ x}{sen\ x\,.\cos\ x}$ e $y_2 = 25$ e (numa janela adequada, considerando o contexto da situação) determinaram-se as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos:



Dado que $0{,}46 \le x \le 1{,}25$ (aproximadamente), conclui-se que o problema apenas possui uma solução: $x = 1{,}12$, considerando a aproximação solicitada.

12.



a) No triângulo rectângulo [EFG], temos $\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}}$. Logo, $\overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$.

A área de uma face lateral é, portanto, dada por $A_f = \frac{\overline{BC} \times \overline{GE}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$.

Assim, a área total da pirâmide é dada por $A(x) = 4 + 4 \times \frac{1}{\cos x} = \frac{4\cos x + 4}{\cos x}$, c.q.m..

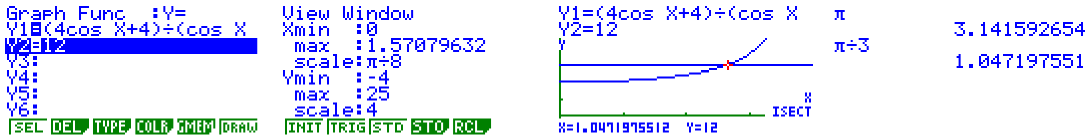
b)

$$A(x) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4\cos x + 4}{\cos x} = 12 \\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4\cos x + 4 - 12\cos x}{\cos x} = 0 \\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{cases} 4 - 8\cos x = 0 \\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}}^{\cos x \neq 0,\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

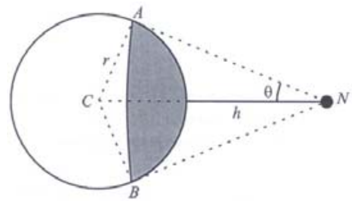
A área da pirâmide é igual a 12 para $x = \frac{\pi}{3}$.

c) Definidas as funções $y_1 = \dfrac{4\cos x + 4}{\cos x}$ e $y_2 = 12$, numa janela de visualização adequada ao contexto da situação, podemos determinar as coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos:



Com recurso à calculadora gráfica, concluímos que a área total da pirâmide é igual a 12 para $x = 1{,}05$. (que é o valor de $\frac{\pi}{3}$ aproximado às centésimas)

13.



a) A área da superfície terrestre é dada por $4\pi r^2$.

A quarta parte da área da superfície terrestre é, portanto, πr^2. O valor de θ a determinar é, então, a solução da equação $f(\theta) = \pi r^2$.

Ora,

$$2\pi r^2(1 - sen\ \theta) = \pi r^2 \Leftrightarrow 2.(1 - sen\ \theta) = 1 \Leftrightarrow 1 - sen\ \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\ \theta = \frac{1}{2}.$$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem $\theta = \frac{\pi}{6}$ (radianos).

b) De acordo com os dados, tem-se $sen\ \theta = \dfrac{r}{\overline{CN}} = \dfrac{r}{r+h}$.

Como a área da superfície da terra visível da nave é dada por $2\pi r^2(1 - sen\ \theta)$, temos:

$$g(h) = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 \times \frac{r+h-r}{r+h} = 2\pi r^2 \times \frac{h}{r+h} = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$, c.q.m..

c) Quando $h \to +\infty$, $\frac{r}{h} \to 0$ e $\frac{r}{h} + 1 \to 1$. Logo, $g(h) \to 2\pi r^2$, quando $h \to +\infty$.

Interpretação: A área da superfície da terra visível da nave aproxima-se tanto quanto se queira de metade da área da superfície total da Terra, desde que a nave esteja suficientemente longe da Terra.

O Professor