Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

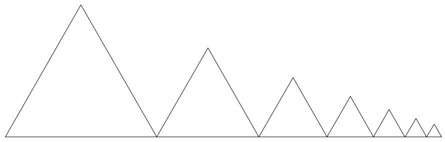
26/10/98 **12.º Ano A**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se ap resentar mais do que uma resposta a que stão será anu lada, o mesmo a contecendo e m caso de resposta a mbígua. **Cotação**: cada resposta certa, +10 pon tos; cada resposta e rrada, -10/3 pon tos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Na figura está representada uma sucessão de triângulos equiláteros, sendo o lado de cada triângulo 2/3 do lado do triângulo anterior. Sabendo que o primeiro triângulo tem de lado 1 cm, e designando por S_n a área total dos n primeiros triângulos, então o valor de $\lim S_n$ é:



[A] 3 cm^2. **[B]** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm^2. **[C]** $\frac{9\sqrt{3}}{20}$ cm^2. **[D]** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

2. Se (u_n) é uma progressão geométrica de razão 4/5 e S_n representa a soma dos primeiros n termos dessa progressão, podemos então afirmar que as proposições:

I. $\lim u_n = 0$

II. $\lim S_n = 0$

III. $\lim S_n = 5.u_1$

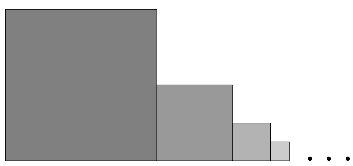
[A] São todas falsas. **[B]** Só II é falsa.

[C] Só I e II são falsas. **[D]** São todas verdadeiras.

3. Se $u_n \to a$ e $v_n \to +\infty$ (com $a, b \in IR^+$), então o limite de $u_n + \frac{b}{v_n}$ é:

[A] $a + b$. **[B]** 0 . **[C]** b . **[D]** a .

4. Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral é dado pela <u>área</u> de cada um dos quadrados que se obtém como mostra a figura.
O lado do quadrado inicial é 3; o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado anterior.
Então o termo geral da sucessão (u_n) é:



[A] $\frac{9}{2n}$. **[B]** $\frac{3}{n}$. **[C]** $\frac{9}{2^{2n-2}}$. **[D]** $\frac{9}{2^{n-2}}$.

5. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+50}{2n+2}$ e designe por (a_n) e (b_n) duas subsucessões de (u_n).
Qual é o valor de $L = \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n)$?

[A] $L = 0$. **[B]** $L = \frac{1}{2}$.

[C] $L = +\infty$. **[D]** $L = 4$.

6. Das sucessões definidas a seguir pelo seu termo geral, escolha a que é um infinitamente grande negativo:

[A] $u_n = (-1)^n.(-2n-2)$. **[B]** $u_n = \dfrac{-2n-2}{-n}$. **[C]** $u_n = \dfrac{2n+2}{-3}$ **[D]** $u_n = 2n+2$.

7. Considere as sucessões de termos gerais seguintes:

$$u_n = \frac{3n-1000}{n^2+n+5} \qquad v_n = \frac{3n^3+5}{n^3+2} \qquad w_n = \frac{n^5+1}{n^4+100}$$

Quais são os valores dos limites $L_1 = \lim\, u_n$, $L_2 = \lim\, v_n$ e $L_3 = \lim\, w_n$?

[A] $L_1 = -200$, $L_2 = \dfrac{5}{2}$, $L_3 = \dfrac{1}{100}$. **[B]** $L_1 = 3$, $L_2 = 3$, $L_3 = 1$.

[C] $L_1 = 0$, $L_2 = +\infty$, $L_3 = +\infty$. **[D]** $L_1 = 0$, $L_2 = 3$, $L_3 = +\infty$.

8. Considere as sucessões de termos gerais seguintes:

$$u_n = \frac{3n^3+n^2+1}{2n^3-n-2} \qquad v_n = \frac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}} \qquad w_n = \frac{1}{n}+\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

Quais são os valores dos limites $L_1 = \lim\, u_n$, $L_2 = \lim\, v_n$ e $L_3 = \lim\, w_n$?

[A] $L_1 = 0$, $L_2 = +\infty$, $L_3 = 0$. **[B]** $L_1 = \dfrac{3}{2}$, $L_2 = 0$, $L_3 = +\infty$.

[C] $L_1 = +\infty$, $L_2 = 0$, $L_3 = +\infty$. **[D]** $L_1 = \dfrac{3}{2}$, $L_2 = +\infty$, $L_3 = +\infty$.

9. Sendo (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = 2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}$, o $\lim\, a_n$ é igual a:

[A] 0. **[B]** 1. **[C]** $+\infty$. **[D]** -2.

10. Seja $h(x) = \pi^{-x}$.
Então, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[h(1)+h(2)+h(3)+\ldots+h(n)\right]$ é igual a:

[A] $\dfrac{1}{\pi-1}$. **[B]** $+\infty$. **[C]** $\dfrac{1}{1+\pi}$. **[D]** 0.

11. Considere as sucessões de termo geral: $a_n = \dfrac{5n^2-n}{2}$ e $b_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2$.

Quanto ao limite da sucessão ($a_n \times b_n$) pode concluir-se que:

[A] é igual a $\dfrac{5}{2}$. **[B]** é igual a $-\dfrac{1}{2}$. **[C]** não existe. **[D]** é igual a $+\infty$.

12. De uma função real de variável real *f* sabe-se que:

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in IR \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \qquad f(-5) = 1$$

Pode-se então afirmar que:

[A] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2 \ \wedge\ f(5) = +1$. **[B]** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2 \ \wedge\ f(5) = -1$.

[C] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +2 \ \wedge\ f(5) = +1$. **[D]** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +2 \ \wedge\ f(5) = -1$.

13. Sendo $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ uma função definida em $]-\infty, -2[$ podemos afirmar que o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ é:

[A] $-\infty$. **[B]** não existe. **[C]** -1. **[D]** 1.

14. Relativamente ao $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{1-x^2}{x+3}$,

[A] o seu valor é $-\infty$. **[B]** o seu valor é -8. **[C]** o seu valor é $+\infty$. **[D]** não existe.

15. O valor do limite $\lim\limits_{x\to2^-} \left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ é:

[A] 4. **[B]** $-\infty$. **[C]** 0. **[D]** $+\infty$.

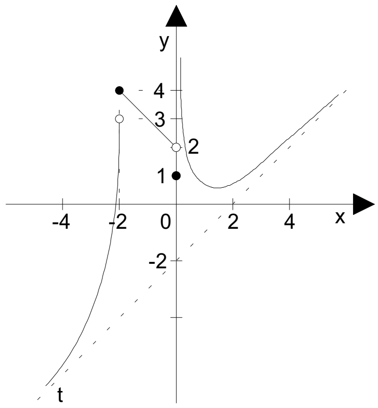
16. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função *g*, de domínio *IR* e contínua em $IR\setminus\{-2,0\}$, da qual a recta *t* é uma assimptota.

Considere a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{1}{n}$.

O valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$ é:

[A] 0. **[B]** 1.

[C] 2. **[D]** $+\infty$.



17. O valor de $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ é igual a

[A] $\dfrac{1}{2}$. **[B]** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **[C]** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **[D]** 1 .

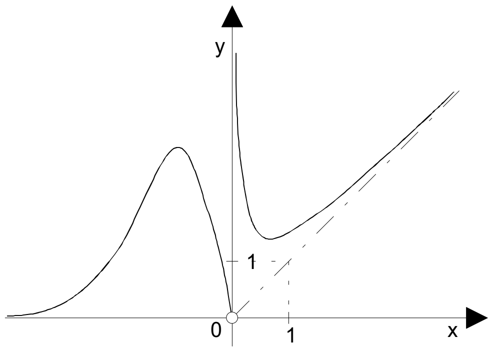
18. A figura representa o gráfico de uma função *f*, real de variável real.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

[A] $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]=+\infty$.

[B] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]=0$.

[C] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]=+\infty$.

[D] $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]=0$.



19. Uma função *h*, contínua em IR, obedece às seguintes condições:

$\lim\limits_{x\to-4} h(x)=2$ e $y=-3$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *h* para $\pm\infty$.
Então, podemos afirmar:

[A] A função não tem zeros. **[B]** A função tem um e um só zero.

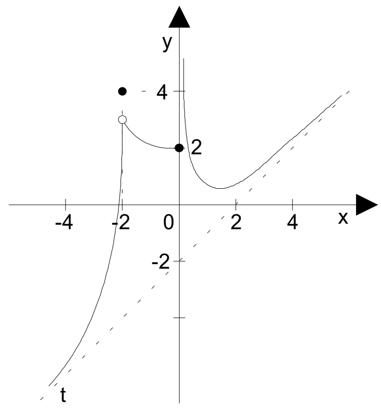
[C] A função tem pelo menos dois zeros. **[D]** A função tem três ou mais zeros.

20. Seja *g* a função definida em IR por $g(x)=1+\dfrac{x^2}{1+x}$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:
São assimptotas bilaterais ao gráfico de *g*, as rectas de equação:

[A] $x=-1$ e $y=x$. **[B]** $x=-1$ e $y=x$ e $y=1$.

[C] $x=-1$ e $y=-x$. **[D]** $x=1$ e $y=x$.

21. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função *f*, da qual a recta *t* é uma assimptota.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

[A] f é contínua no ponto $x = 0$.

[B] $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-2) \right] = 0^+$.

[C] f é contínua no intervalo $\left[-4, \ -2\right]$.

[D] $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + (x-2) \right] = 0^+$.

22. Seja *g*: $x \to \begin{cases} x^2 - k & \Leftarrow \quad x \neq 0 \\ 1 & \Leftarrow \quad x = 0 \end{cases}$.

O valor de *k* para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano à função *g*, no intervalo $\left[-1, \ 1\right]$ é:

[A] 1. **[B]** $\frac{1}{2}$. **[C]** -1. **[D]** $-\frac{1}{2}$.

23. Das afirmações seguintes:

I. Se *f* é uma função contínua em $\left[-3, \ 2\right]$, $f(-3) = 5$ e $f(2) = 14$, então existe um objecto cuja imagem por *f* é 10.

II. Se *f* é uma função contínua em -3 e em 2 e $f(-3) \times f(2) < 0$, então *f* tem pelo menos 1 zero em $\left]-3, \ 2\right[$.

III. Se *f* é uma função contínua em $\left[-3, \ 2\right]$, então a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos 1 solução no intervalo $\left[-3, \ 2\right]$.

IV. Se a função *f* tem um zero no intervalo $\left]-3, \ 2\right[$ e é contínua e crescente nesse intervalo, então $f(-3) < 0$ e $f(2) > 0$.

apenas são verdadeiras?

[A] I e III. **[B]** I e IV. **[C]** I, III e IV. **[D]** I, II e III.

24. Seja g a função definida em IR por $g(x) = x^5 - x + 1$.

O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

[A] $\left]-1, \ 0\right[$. **[B]** $\left]0, \ 1\right[$. **[C]** $\left]1, \ 2\right[$. **[D]** $\left]2, \ 3\right[$.

25. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ -x^2 + k & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$.

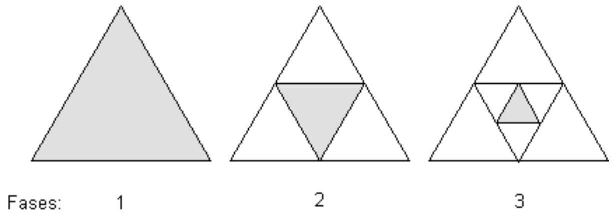
O valor de *k* para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano à função *f*, no intervalo $\left[-1, \ 3\right]$ é:

[A] 4. **[B]** 12. **[C]** -6. **[D]** 6.

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

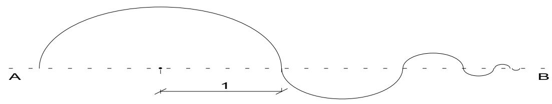
1. u_n designa a área do triângulo colorido da fase *n*.
Sabendo que $u_1 = 1$, determine:



a) u_n e justifique que é um infinitésimo.

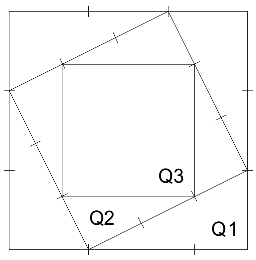
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, designando por S_n a soma das áreas dos triângulos das primeiras n fases.

2. A curva é formada por uma sucessão de arcos que são semicircunferências alternadamente acima e abaixo de AB, sendo o raio de cada uma delas **metade** do anterior.
Sabe-se que o raio do primeiro arco é 1.



Designando por S_n o comprimento total dos *n* primeiros arcos, calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. Considere a sucessão de quadrados Q_1, Q_2, Q_3, ... formados como a figura sugere.
Os lados dos quadrados estão divididos em três partes iguais.
Seja A a área do quadrado Q_1.



a) Mostre que a área do quadrado Q_n é dada por $A_n = A \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$.

b) Designando por S_n a soma das áreas dos *n* primeiros quadrados, calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ em função de A.

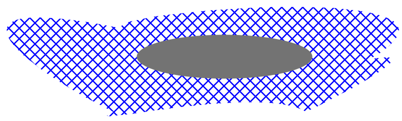
4. Calcule cada um dos seguintes limites, se existir:

a) $\lim \left(\frac{2n-3n^2}{1-3n} - n\right)$;

b) $\lim \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right]$.

5. Estude a continuidade da função $c(t) = \begin{cases} \frac{t^2-5t+6}{t-2} & \Leftarrow \quad t \neq 2 \\ -1 & \Leftarrow \quad t = 2 \end{cases}$, definida em IR.

6. Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido.
O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, *t* segundos após ter sido detectada, é dado por



$$r(t) = \frac{1+4t}{t+2} \quad (t \geq 0).$$

a) Calcule $r(0)$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)$ e diga qual o significado físico destes valores.

b) Calcule a velocidade média de crescimento do raio da nódoa no intervalo $[1, 2]$.

c) Diga qual é o significado físico do limite $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{r(t)-r(0)}{t}$ e determine-o.

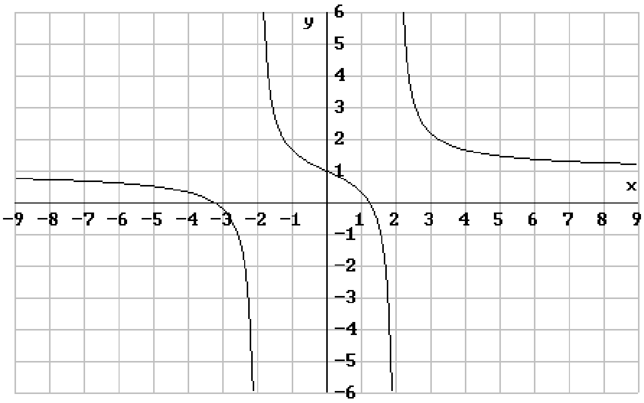
7. Determine *k* de modo que a recta de equação $y = 3x - 1$ seja assimptota do gráfico de $y = \dfrac{kx^3 - 3x^2 + x + 1}{3x^2 + 1}$.

8. Mostre que a recta de equação $y = 2x - 1$ é assimptota ao gráfico da função $x \to f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$.

9. Considere a função *f*, real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x} & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ \dfrac{8}{x} - 1 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$$

cujo gráfico se encontra junto.
Recorrendo ao gráfico:



a) Conjecture o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
Deduza o valor de a.

b) Determine b e c.

c) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa nula.

10. Considere a função $x \to f(x) = 4x^3 - 7x + 1$.

a) Complete o quadro.

X	-2	0	1	2
f(x)				

b) Justifique a seguinte afirmação:
«A equação $f(x) = 0$ tem três e só três raízes: uma pertence ao intervalo $]-2, 0[$, outra pertence ao intervalo $]0, 1[$ e a terceira pertence ao intervalo $]1, 2[$.»

c) Determine a menos de 0,1 a maior das raízes.

11. Considere a função *f*, real de variável real: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x} & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ \dfrac{8}{x} - 1 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$

a) Indique o domínio da função e calcule $f(1)$ e $f(4)$.

b) Mostre que é falsa a proposição: $\exists c \in]1, 4[: f(c) = \dfrac{1}{2}$.
O resultado obtido contraria o teorema de Bolzano? Justifique a resposta.

c) Determine, se existirem, as assimptotas do gráfico de *f.*

12. Considere a função *f*, real de variável real: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ -x^2 - 1 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $f(-1)$, $f(3)$ e $f(-1) \times f(3)$.

b) Mostre que *f* não tem zeros.
Tendo em atenção a alínea anterior, o resultado obtido contraria o teorema de Bolzano? Justifique.

c) Defina a função derivada de *f.*

<u>**SOLUÇÕES**</u>

1.ª Parte

1. C	**6.** C	**11.** A	**16.** D	**21.** B
2. B	**7.** D	**12.** B	**17.** B	**22.** C
3. D	**8.** D	**13.** D	**18.** B	**23.** B
4. C	**9.** B	**14.** D	**19.** C	**24.** C
5. A	**10.** A	**15.** D	**20.** A	**25.** A

2.ª Parte

1.

a) $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}$.

2. A sucessão dos comprimentos dos raios é: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, sendo $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots$ a sucessão dos comprimentos dos arcos.

Esta sucessão é uma progressão geométrica de razão 1/2, logo $S_n = \pi . \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$.

Portanto, $\lim\ S_n = \lim\left(\pi . \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(2\pi(1-(\frac{1}{2})^n)\right) = 2\pi.(1-\lim\ (\frac{1}{2})^n) = 2\pi\times(1+0) = 2\pi$.

3.

a) Sabendo que o comprimento do lado do quadrado Q_1 é $l_1 = \sqrt{A}$, o comprimento do lado do quadrado Q_2 será $l_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{A}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{A}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5A}{9}} = \frac{\sqrt{5A}}{3}$, pelo que a sua área será $A_2 = \left(\frac{\sqrt{5A}}{3}\right)^2 = \frac{5A}{9}$.

Considerando que as áreas dos quadrados estão em p. g., a razão da progressão é $r = \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{\frac{5A}{9}}{A} = \dfrac{5}{9}$, pelo que $A_n = A\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$ (note que, numa progressão geométrica, $u_n = u_1\times r^{n-1}$).

b) Como numa progressão geométrica é $S_n = u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}$, no caso será $S_n = A\times\dfrac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}}$.

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[A\times\dfrac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}}\right] = \dfrac{A}{\frac{4}{9}}\times\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{5}{9}\right)^n\right] = \frac{9}{4}A\times(1-0) = \frac{9}{4}A$.

4.

a) $\lim\left(\dfrac{2n-3n^2}{1-3n} - n\right) = -\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right) = 0$

5. A função é contínua em IR.

6.

a) $r(0)=\dfrac{1+4\times 0}{0+2}=0{,}5$; representa o raio (em centímetros) da nódoa no instante em que foi detectada;

$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=4$; o raio da nódoa aumentará até cerca de 4 cm de raio, não atingindo esse valor num intervalo de tempo razoavelmente grande.

b) $tvm_{[1,2]}=\dfrac{7}{12}$. A velocidade média de crescimento do raio da nódoa no intervalo $[1,\ 2]$ é $\dfrac{7}{12}$ cm/s.

c) O limite considerado, $f'(0^+)$, traduz o valor da velocidade instantânea de crescimento do raio da nódoa no instante em que foi detectada. $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{r(t)-r(0)}{t}=\dfrac{7}{4}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{k}{3} \Leftrightarrow \dfrac{k}{3}=3 \Leftrightarrow k=9$.

8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[(f(x)-(2x-1)\right]=0$.

9.

a) 1; 1; $a=1$ ($y=1$ é uma assimptota horizontal).

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$; $x=2$ é assimptota vertical. Logo, $b=2$ (ou $c=2$).

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$; $x=-2$ é assimptota vertical. Logo, $c=2$ (ou $b=2$).

c) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2})-1}{x}=\ldots=-\dfrac{1}{2}$; Uma equação da recta pedida é $y=-\dfrac{x}{2}+1$.

10.

a)

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-17	1	-2	19

b) f é uma função contínua e como $f(-2)\times f(0)<0$, $f(0)\times f(1)<0$ e $f(1)\times f(2)<0$ a função tem um zero em cada um dos intervalos referidos (teorema de Bolzano).
Não pode ter mais do que 3 zeros porque, em IR, um polinómio de grau três tem no máximo três raízes.

x	f(x)
1,1	-1,376
1,2	-0,488
1,3	+0,688

c) A raiz pedida pertence ao intervalo $]1{,}2;\ 1{,}3[$, sendo 1,2 um valor aproximado por defeito, a menos de 0,1.

11.

a) $D_f=IR\setminus\{0\}$; $f(-1)=(-1)^2+2=3$; $f(3)=-3^2-1=-10$.

b) Ora, $\begin{cases} f(c)=\frac{1}{2} \\ c\in\,]1,\ 4[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{c}-1=\frac{1}{2} \\ c\in\,]1,\ 4[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{c}=\frac{3}{2} \\ c\in\,]1,\ 4[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{16}{3} \\ c\in\,]1,\ 4[\end{cases} \Leftrightarrow c\in\varnothing$. Logo, a afirmação feita é falsa.

O resultado obtido não contraria o teorema de Bolzano, pois f não é uma função contínua em $[-1,\ 3]$, visto não ser contínua à direita de $x=1$.

Com efeito, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq f(1)$, pois $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2-1)=-2$ e $f(1)=1^2+2=3$.

c) *Determinação das assimptotas verticais*:

$\lim\limits_{x\to 0^\mp} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^\mp}\dfrac{x^2-1}{x}=\pm\infty$.

Logo, $x=0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x}=0$

Não existe assimptota em $x=1$, pois os limites laterais nesse ponto são finitos (ver alínea anterior).

Determinação das assimptotas não verticais:

$m_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{8}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=0$;

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-0\times x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8}{x}-1\right)=-1$.

Logo, $y=-1$ é equação de uma assimptota horizontal unilateral ($+\infty$).

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 1\times x) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2-1}{x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = 0.$$

Logo, $y = x$ é equação de uma assimptota oblíqua unilateral ($-\infty$).

12.

a) $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$; $f(3) = -3^2 - 1 = -10$; $f(-1)\times f(3) = -30$.

b) Ora, $x^2 + 2 \geq 2,\ \forall x \in IR$ e $-x^2 - 1 \leq -1,\ \forall x \in IR$. Logo, *f* não tem zeros.

O resultado obtido não contraria o teorema de Bolzano, pois *f* não é uma função contínua em $[-1,\ 3]$, visto não ser contínua à direita de $x = 1$.

Com efeito, $\lim_{x\to1^+} f(x) \neq f(1)$, pois $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (-x^2 - 1) = -2$ e $f(1) = 1^2 + 2 = 3$.

c) Para $x < 1$, é $f'(x) = (x^2 + 2)' = 2x$.

Para $x > 1$, é $f'(x) = (-x^2 - 1)' = -2x$.

Logo, $x \to f'(x) = \begin{cases} 2x & \Leftarrow & x < 1 \\ -2x & \Leftarrow & x > 1 \end{cases}$

É obvio que *f* não é diferenciável em $x = 1$, pois não é contínua nesse ponto (teorema da derivabilidade e continuidade) - como já foi mostrado na alínea anterior.

O Professor