Escola Secundária da Sé-Lamego
Ficha de Trabalho de Matemática

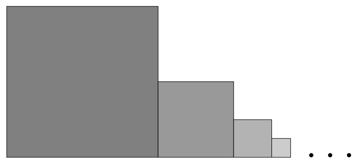
09/12/98 **12.º Ano A**

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___

1.ª Parte

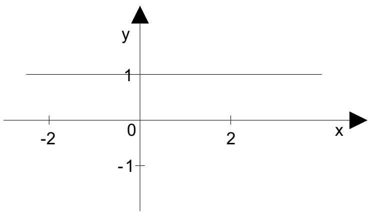
Para cada uma das seguintes questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +10 pontos; cada resposta errada, -10/3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral é dado pela <u>área</u> de cada um dos quadrados que se obtém como mostra a figura.
O lado do quadrado inicial é 3; o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado anterior.
Então o termo geral da sucessão (u_n) é:

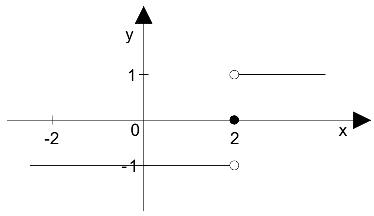


[A] $\frac{9}{2n}$. **[B]** $\frac{3}{n}$. **[C]** $\frac{9}{2^{2n-2}}$. **[D]** $\frac{9}{2^{n-2}}$.

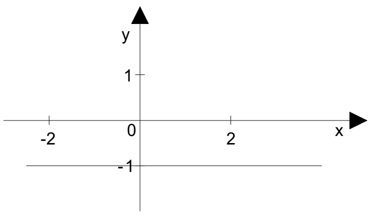
2. Seja *f* a função real de variável real definida por $f(x)=|x-2|$.
Indique qual das representações gráficas esboçadas na figura é a função derivada de *f*.



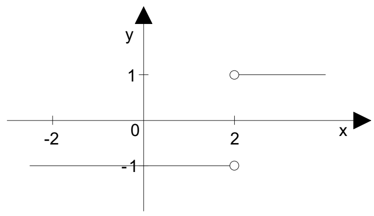
[A]



[B]



[C]

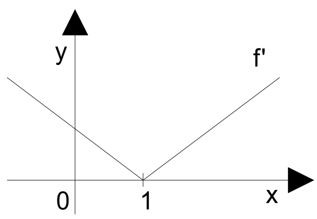


[D]

3. Dada a função real de variável real definida por $m(x)=\frac{2x}{x+1}$, o valor de $\lim_{h\to 0}\frac{m(h+2)-m(2)}{h}$ é:

[A] 0. **[B]** não existe. **[C]** $\frac{2}{9}$. **[D]** $\frac{2}{3}$.

4. A figura ao lado representa um gráfico da derivada de uma função real de variável real *f*, de domínio IR.
Então podemos concluir que



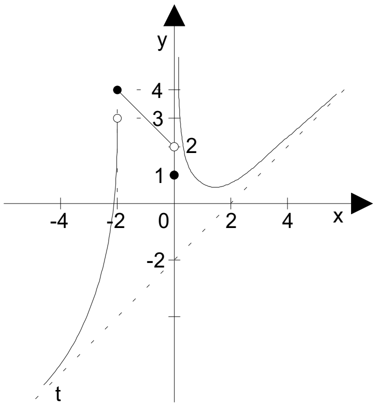
[A] a função *f* é crescente em $]-\infty, 1]$.

[B] a função *f* tem um extremo relativo em $x=1$.

[C] a concavidade do gráfico de *f* está sempre virada para baixo.

[D] a função *f* é decrescente em IR.

5. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio IR e contínua em $IR \setminus \{-2,0\}$, da qual a recta t é uma assimptota.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

[A] $g'(-3) \times g''(-3) > 0$.

[B] $g(-1) \times g''(-1) > 0$.

[C] $g'(-3) \times g''(-3) < 0$

[D] $g'(-1) \times g''(-1) < 0$.

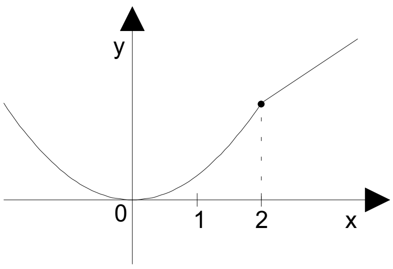
6. A função quadrática $x \to f(x) = ax^2 + c$, cuja curva representativa corta o eixo das ordenadas no ponto A de ordenada 2 e tem por tangente no ponto de abcissa 1 a recta de equação $y = -6x + 5$, é:

[A] $f(x) = -5x^2 + 2$. **[B]** $f(x) = -3x^2 + 2$. **[C]** $f(x) = -3x^2 + 5$. **[D]** $f(x) = -6x^2 + 2$.

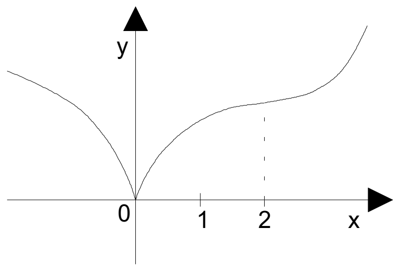
7. O quadro seguinte

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	-		+		+
y'	↘		↗		↘

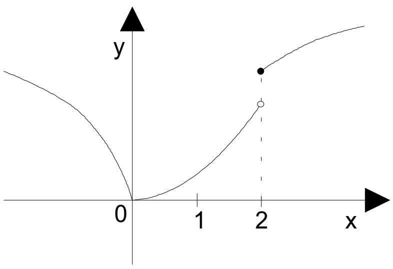
corresponde a uma função de domínio IR cuja representação gráfica é:



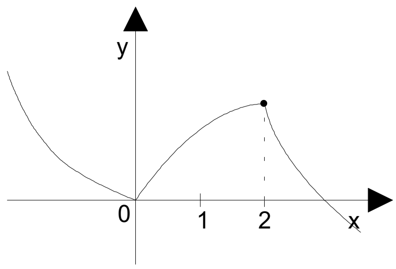
[A]



[B]

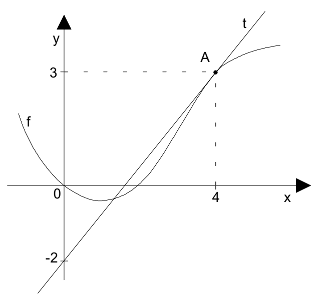


[C]



[D]

8. A recta t é tangente à curva representativa da função f no ponto A (4, 3). Pode-se afirmar que:



[A] $f'(4) = -2$.

[B] $f'(4) = 3$.

[C] $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - 3}{x - 4} = \dfrac{5}{4}$.

[D] $f'(4^+) \neq f'(4^-)$.

9. Seja s a função definida em IR por $s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \Leftarrow \quad x < \pi \\ x - \pi & \Leftarrow \quad x \geq \pi \end{cases}$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

[A] s é contínua.

[B] s tem derivada em 2π .

[C] $y = \pi$ é uma assimptota do gráfico de s.

[D] Não existem assimptotas ao gráfico de s.

10. Seja g a função definida em IR por $g(x)=1+\frac{x^2}{1+x}$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:
São assimptotas bilaterais ao gráfico de g, as rectas de equação:

[A] $x=-1$ e $y=x$. **[B]** $x=-1$ e $y=x$ e $y=1$.

[C] $x=-1$ e $y=-x$. **[D]** $x=1$ e $y=x$.

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função real de variável real

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{2x}.$$

a) Indique o domínio da função e determine as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da mesma com os eixos coordenados.

b) Determine as assimptotas do gráfico da função.

c) Elabore um quadro onde figure o sentido de variação e extremos relativos da função, assim como o sentido das concavidades e pontos de inflexão do respectivo gráfico, caso existam.

d) Tendo em consideração as informações obtidas, esboce o gráfico da função e indique o seu contradomínio.

2. Considere a função real de variável real: $g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+\frac{k}{3} & \Leftarrow \quad x\geq -2 \\ \frac{\sqrt{1-4x}-3}{x+2} & \Leftarrow \quad x<-2 \end{cases}$, com $k\in IR$.

a) Sabendo que g é contínua em IR, determine k.

b) Estude o sentido das concavidades e determine os pontos de inflexão do gráfico da restrição da função ao intervalo $[-2,+\infty[$.

c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x=1$.

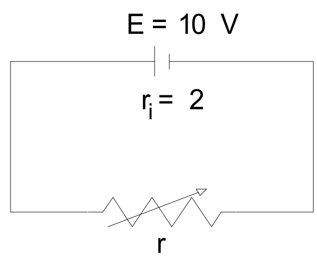
3. Seja h a função real de variável real definida por: $h(x)=\frac{2x-1}{x+2}$.

a) Verifique que o gráfico da função admite uma recta tangente paralela à recta de equação $y=5x$ e apresente-a.

b) Faça uma opção correcta!
Uma equação da recta tangente ao gráfico da função no seu zero é:

[A] $8y-10x-5=0$. **[B]** $8y+10x-4=0$. **[C]** $8x-10y-4=0$. **[D]** $x=\frac{1}{2}$.

c) Estude a variação da função.



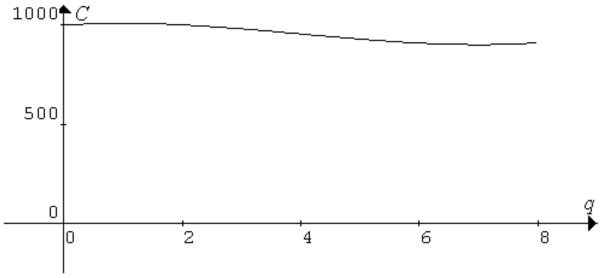
4. Para o circuito eléctrico esquematizado na figura ao lado, a potência dissipada na resistência variável é dada, em *Watt*, por

$$P(r)=\frac{100.r}{(r+2)^2} \quad (r\geq 0\text{, em } \Omega).$$

a) Usando a definição, calcule $P'(1)$ e interprete o resultado que encontrou.

b) Mostre que $P'(r) = \dfrac{100.(2-r)}{(r+2)^3}$ e determine o valor da resistência variável para o qual a potência dissipada é máxima, assim como o valor dessa potência.

5. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de ***q*** centenas de peças, expresso em milhares de escudos, é dado por



$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000$$

a) Determine a função $C'(q)$, custo marginal, e calcule o seu valor para 6 centenas de peças.

b) Estude a variação do custo, no intervalo $]0,\ 8[$. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo?

6. Considere a função ***C***, real de variável real, tal que

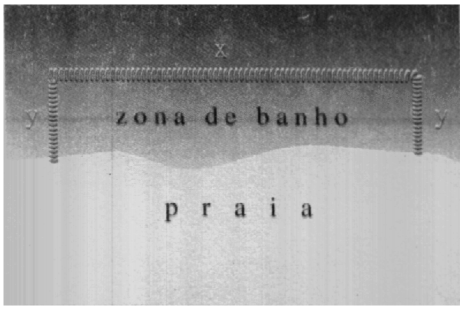
$$C(x) = \frac{x}{2} + 1000 + \frac{200}{x}$$

a) Indique o domínio de ***C*** e determine as equações das assimptotas do gráfico de ***C***.

b) Uma empresa fabrica um certo tipo de objectos e vende-os em lotes de *x* unidades, sendo $10 \le x \le 50$.
O custo da produção, em contos, é dado pela restrição da função ***C***, ao intervalo $[10,\ 50]$.
Qual é o valor mínimo desse custo?

7. Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 metros quadrados de área, para banho das crianças, como mostra a figura.

Se cada metro da fita de flutuadores custar 2.000$00, qual deverá ser o valor de *x* e de *y* para que o gasto na compra seja mínimo?

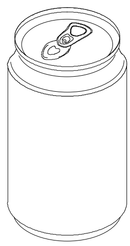


8. A D.ª Rosa quer isolar um canto da sua sala rectangular para o seu bébé brincar.

Em que posição deve colocar uma grade de 3 metros de comprimento para que a área obtida seja o maior possível?

9. Mostre que, para que o custo em matéria prima das latas de cerveja de capacidade 33 cl, seja mínimo, as suas dimensões devem ser: $r = \sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$ e $h = 2r$.

Verifique se assim é na realidade.



10. Considere a função real de variável real: $f(x)=\dfrac{2x^2}{2-x^2}$

a) Indique o domínio da função e determine as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da mesma com os eixos coordenados.

b) Averigúe a existência de assimptotas verticais ao gráfico de f.

c) Verifique que a recta de equação $y=-2$ é assimptota horizontal do gráfico de f.

d) Determine, se existirem, os extremos relativos de *f* e indique os intervalos de crescimento e de decrescimento da função.

SOLUÇÕES

1.ª Parte

1. C	**3.** C	**5.** A	**7.** C	**9.** B
2. D	**4.** B	**6.** B	**8.** C	**10.** A

2.ª Parte

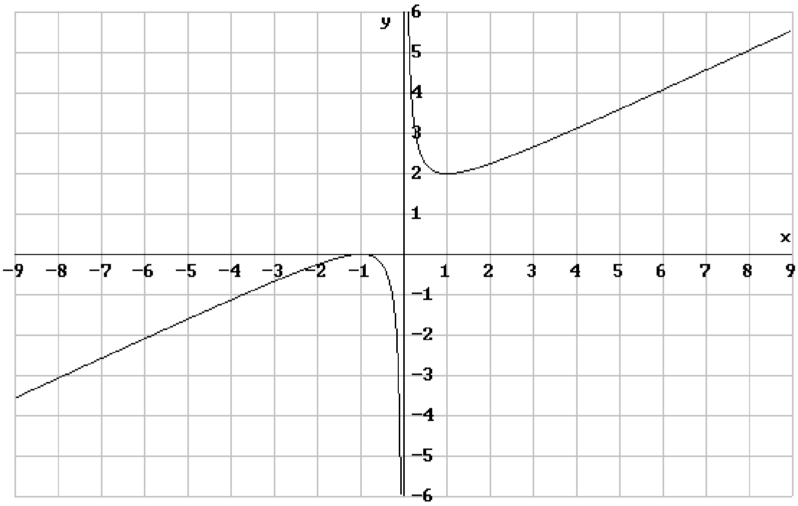
1.

a) $D=IR\setminus\{0\}$;
zeros: $x=-1$;
pontos de intersecção com os eixos: (-1, 0).

b) Assimptota vertical: $x=0$;
Assimptota oblíqua: $y=\frac{1}{2}x+1$.

c) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$;
$f''(x)=\dfrac{1}{x^3}$;
máximo: 0 para $x=-1$;
mínimo: 2 para $x=1$.

d) $D'=\left]-\infty,\ 0\right]\cup\left[2,\ +\infty\right[$.



2.

a) $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)=g(-2)\Leftrightarrow k=58$.

b) A nova função considerada é $h(x)=x^3-3x^2+\dfrac{58}{3}$, de domínio $D=\left[-2,\ +\infty\right[$.
No intervalo $\left[-2,\ 1\right]$ a concavidade é voltada para baixo; no intervalo $\left[1,\ +\infty\right[$ a concavidade é voltada para cima; ponto de inflexão (1, $\dfrac{52}{3}$).

c) $y=-3x+\dfrac{61}{3}$. NOTA: $g'(1)=-3$ e o ponto de tangência é o ponto de inflexão de *h*.

3.

a) $y=5x+2$. NOTA: $h'(x)=5\Leftrightarrow x=-1$; ponto de tangência: (-1, -3).

b) A resposta correcta é **C**. NOTA: $h'(\frac{1}{2})=\frac{4}{5}$ e o ponto de tangência é ($\frac{1}{2}$, 0).

c) Crescente em $\left]-\infty,\ -2\right[$ e em $\left]-2,\ +\infty\right[$.

4.

a) $P'(1)=\dfrac{100}{27}$. Para $r=1\ \Omega$, a taxa de variação de potência é $\dfrac{100}{27}$ W/Ω.

b) $P'(r)=\left(\dfrac{100.r}{(r+2)^2}\right)'=\dfrac{(100.r)'\times(r+2)^2-\left((r+2)^2\right)'\times 100.r}{(r+2)^4}=\dfrac{100.(r+2)^2-2\times(r+2)\times 1\times 100.r}{(r+2)^4}=\dfrac{100.(r+2)-200.r}{(r+2)^3}=\dfrac{100.(2-r)}{(r+2)^3}$

r	0		2	$+\infty$
P'(r)	+	+	0	-
P(r)		↗	12,5	↘

É de 2 Ω o valor da resistência variável para o qual a potência dissipada é máxima, obtendo-se para esse valor a potência máxima de 12,5 W.

5.

a) $C'(q)=3q^2-24q+21$; $C'(6)=-15$.

b) Até uma centena de peças o custo aumenta; também aumenta quando q varia entre 7 e 8. Quando $q\in\left]1,\ 7\right[$ o custo diminui.
O número de peças para que o custo seja mínimo é de 700, portanto este será o número aconselhável de peças.

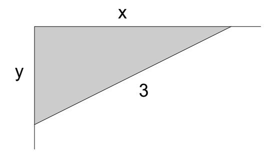
6.

a) $D=IR\setminus\{0\}$; Assimptota vertical: $x=0$; Assimptota oblíqua: $y=\dfrac{x}{2}+1000$.

b) $C'(x)=\dfrac{x^2-400}{2x^2}$. C é mínima em $[10,\ 50]$ para $x=20$. O custo mínimo é de 1020 contos.

7. $P(x)=x+\dfrac{400}{x}$; $P'(x)=1-\dfrac{400}{x^2}$; O gasto mínimo é de 80 contos, para $x=20$ e $y=10$ metros.

8. $x=y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, pois $A(x)=\dfrac{x\sqrt{9-x^2}}{2}$, donde $A'(x)=\dfrac{9-2x^2}{2\sqrt{9-x^2}}$.



9. Sendo $V=\pi r^2 h$ e $A=2\pi r^2+2\pi rh$, será $h=\dfrac{330}{\pi r^2}$, logo $A(r)=2\pi r^2+\dfrac{660}{r}$.

Assim, $A'(r)=\dfrac{4\pi r^3-660}{r^2}$ e o seu zero é $r=\sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$.

E, $h=\dfrac{330}{\pi\sqrt[3]{\left(\dfrac{165}{\pi}\right)^2}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}}{\sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}}=\dfrac{2\times 165\times\sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}}{\pi\times\dfrac{165}{\pi}}=2r$.

(as unidades estão em cm).

10.

a) $D=IR\setminus\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$; Intersecção com os eixos: (0, 0).

b) Assimptotas verticais: $x=-\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)+2)=0$.

d) Mínimo: $f(0)=0$;
decrescente em $\left]-\infty,\ -\sqrt{2}\right[$ e $\left]-\sqrt{2},\ 0\right]$;
crescente em $\left[0,\ \sqrt{2}\right[$ e $\left]\sqrt{2},\ +\infty\right[$.

O Professor