

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Intersecção de planos. Resolução de sistemas

16/03/99

11.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x - 3y + z = 2$ e $\beta: x - 2y - z = 1$?

2. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha: x + 2y - z + 6 = 0 ; \beta: 3x + y + z = 4 \text{ e } \gamma: x - 3y - 2z = 1.$$

3. Qual a intersecção do plano $\alpha: 2x + y - z = 3$ com o plano $\beta: 4x + 2y - 2z = 10$?

4. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha: x + y + z - 6 = 0 ; \beta: 2x - y + 1 = 0 \text{ e } \gamma: 3x + z - 2 = 0.$$

5. Investigue se há pontos comuns aos três planos dados pelas seguintes equações:

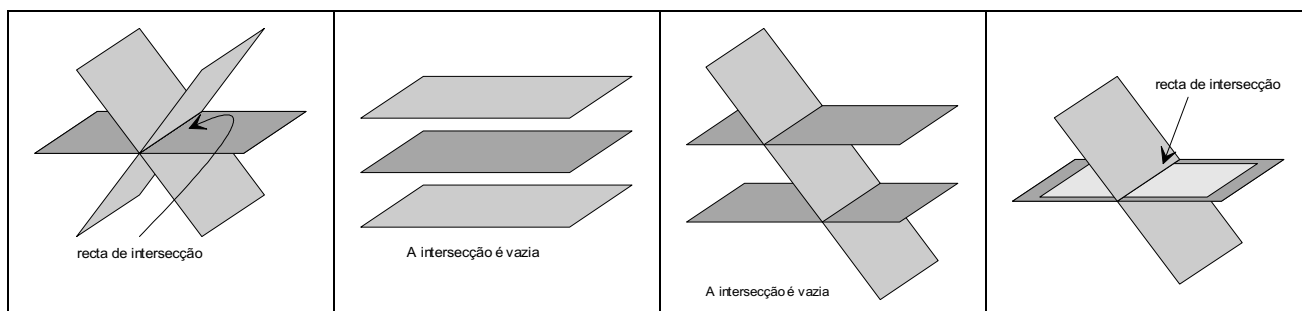
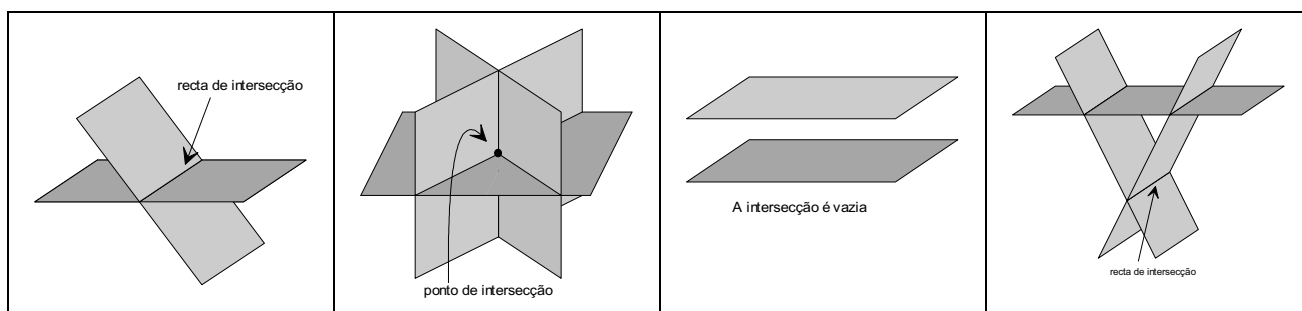
$$\alpha: x + 2y - 3z = -6 ; \beta: 2x - y - z = 3 \text{ e } \gamma: x + y - 2z = -3.$$

6. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x + y - z = 3$; $\beta: 4x + 2y - 2z = 10$ e $\gamma: 6x + 3y - 3z = 0$

7. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x + y - z = 3$; $\beta: 4x + 2y - 2z = 10$ e $\gamma: x + y - z = 1$

8. Qual a intersecção dos planos:

$$\alpha: 2x - 3y + z = 2 ; \beta: x - 2y - z = 1 \text{ e } \gamma: 2x - 4y - 2z = 2?$$



1. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x - 3y + z = 2$ e $\beta: x - 2y - z = 1$?

Resolução

Essa intersecção é o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem as equações do sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$.

Estes planos não são paralelos (os vectores normais, $\vec{n}_\alpha = (2, -3, 1)$ e $\vec{n}_\beta = (1, -2, -1)$ não são paralelos), logo a sua intersecção é uma recta.

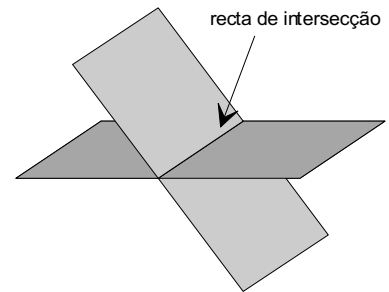
Resolvendo o sistema em ordem a x e a y , vem

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (2y + z + 1) - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3z \\ x = -5z + 1 \end{cases}$$

ou seja, $\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$, que são equações cartesianas da recta de intersecção.

Essa recta passa no ponto $(1, 0, 0)$ e é paralela ao vector $\vec{v} = (-5, -3, 1)$.

Há infinitos ternos ordenados (x, y, z) que verificam o sistema (qualquer ponto da recta de intersecção verifica o sistema) por isso diz-se que o sistema é **indeterminado**.



2. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha: x + 2y - z + 6 = 0 ; \beta: 3x + y + z = 4 \text{ e } \gamma: x - 3y - 2z = 1.$$

Resolução

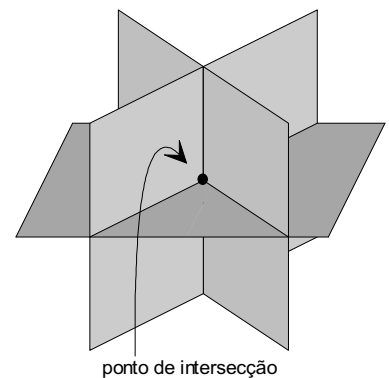
O ponto pedido é a solução do sistema de equações $\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y + z = -7 \\ 10y + 7z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z = 15 \\ 10y + 7z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Os três planos intersectam-se no ponto $J(1, -2, 3)$.

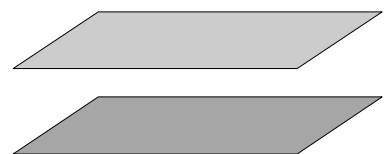
Obtém-se um, e um só terno ordenado de valores reais que verifica o sistema. Diz-se então que o sistema é **possível e determinado**.



3. Qual a intersecção do plano $\alpha: 2x + y - z = 3$ com o plano $\beta: 4x + 2y - 2z = 10$?

Resolução

O sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$ não tem soluções.



A intersecção é vazia

Os vectores normais $\vec{n}_\alpha = (2, 1, -1)$ e $\vec{n}_\beta = (4, 2, -2)$ são paralelos, logo também são paralelos os planos e são conjuntos disjuntos. A intersecção é vazia. Este sistema é **impossível**.

4. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha: x + y + z - 6 = 0 ; \beta: 2x - y + 1 = 0 \text{ e } \gamma: 3x + z - 2 = 0 .$$

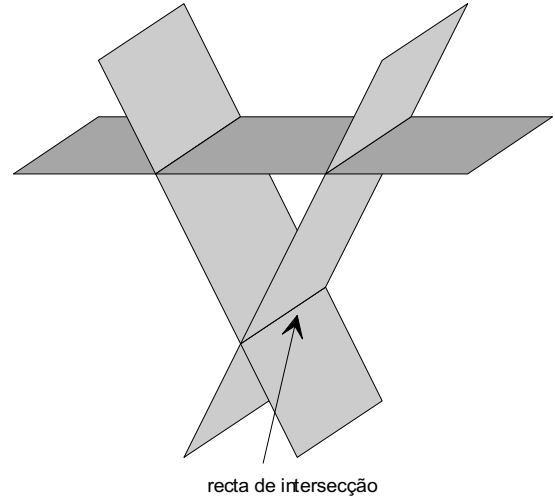
Resolução

Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = -1 \\ 3x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y = 2x + 1 \\ z = 2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x + 1 + 2 - 3x = 6 \\ y = 2x + 1 \\ z = 2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 3 \\ y = 2x + 1 \\ z = 2 - 3x \end{cases} . \text{ Logo, o sistema é impossível.}$$

É de reparar que a intersecção dos dois últimos planos é a recta $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ que é paralela ao plano $\alpha: x + y + z - 6 = 0$, visto que $(1, 2, -3) \cdot (1, 1, 1) = 0$.

Logo não se pode encontrar qualquer ponto comum aos três planos. As equações do sistema dizem-se condições **incompatíveis**.



5. Investigue se há pontos comuns aos três planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha: x + 2y - 3z = -6 ; \beta: 2x - y - z = 3 \text{ e } \gamma: x + y - 2z = -3 .$$

Resolução

Resolvendo o sistema, vem

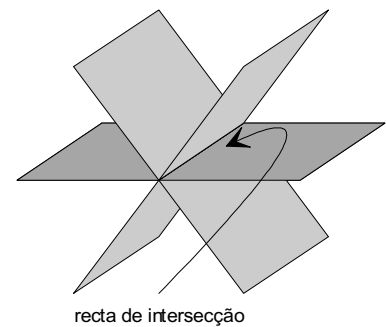
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ y - z = -3 \\ -3y + 3z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ y - z = -3 \\ y - z = -3 \end{cases} \text{ o que equivale a obter apenas duas equações.}$$

Então, como há 3 incógnitas, podemos exprimir duas delas em função da terceira, o que mostra que o sistema é **indeterminado**:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(z - 3) - 3z = -6 \\ y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z - 3 \end{cases} .$$

Para cada valor escolhido para z vem um valor para x , outro para y , logo o sistema tem infinitas soluções.

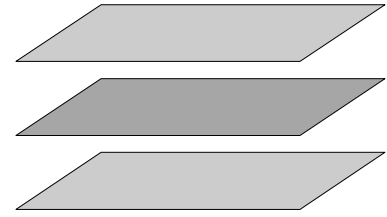
O sistema $\begin{cases} x = z \\ y = z - 3 \end{cases}$ pode escrever-se $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$, logo a recta que passa em $(0, -3, 0)$, com vector director $(1, 1, 1)$ é comum aos três planos dados; todos os seus pontos são solução do sistema.



6. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x + y - z = 3$; $\beta: 4x + 2y - 2z = 10$ e $\gamma: 6x + 3y - 3z = 0$

Resolução

$$\text{O sistema } \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 10 \\ 6x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 6 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \text{ não tem soluções.}$$



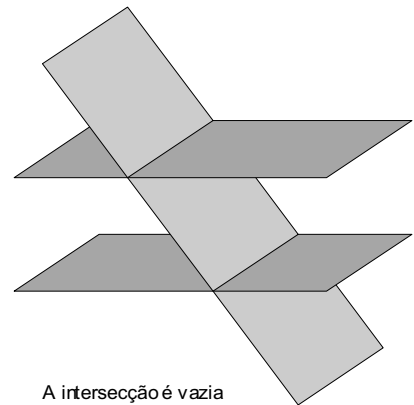
A intersecção é vazia

Os vectores normais $\vec{n}_\alpha = (2,1,-1)$, $\vec{n}_\beta = (4,2,-2)$ e $\vec{n}_\gamma = (6,3,-3)$ são paralelos, logo também são paralelos os planos e são conjuntos disjuntos. A intersecção é vazia. Este sistema é **impossível**.

7. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x + y - z = 3$; $\beta: 4x + 2y - 2z = 10$ e $\gamma: x + y - z = 1$

Resolução

$$\text{O sistema } \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 10 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 6 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \text{ não tem soluções.}$$



A intersecção é vazia

Os vectores normais $\vec{n}_\alpha = (2,1,-1)$, $\vec{n}_\beta = (4,2,-2)$ são paralelos, logo também são estritamente paralelos os planos α e β . Estes planos são concorrentes com o plano γ .

A intersecção é vazia. Este sistema é **impossível**.

8. Qual a intersecção dos planos:

$$\alpha: 2x - 3y + z = 2 \ ; \ \beta: x - 2y - z = 1 \ \text{ e } \ \gamma: 2x - 4y - 2z = 2 \ ?$$

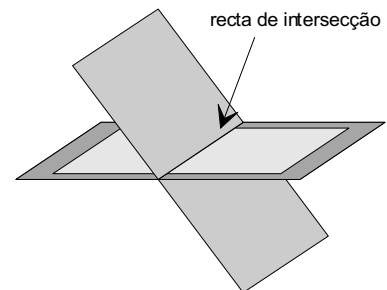
Resolução

Dois dos planos são coincidentes (β e γ) e o terceiro não é paralelo aos dois restantes (os vectores normais, $\vec{n}_\alpha = (2,-3,1)$ e $\vec{n}_\beta = (1,-2,-1)$ não são paralelos), logo a sua intersecção é uma recta.

Resolvendo o sistema em ordem a x e a y , vem

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (2y + z + 1) - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3z \\ x = -5z + 1 \end{cases}$$

ou seja, $\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$, que são equações cartesianas da recta de intersecção.



Essa recta passa no ponto $(1, 0, 0)$ e é paralela ao vector $\vec{v} = (-5,-3,1)$.

Há infinitos ternos ordenados (x, y, z) que verificam o sistema (qualquer ponto da recta de intersecção verifica o sistema) por isso diz-se que o sistema é **indeterminado**.