Escola Secundária da Sé-Lamego

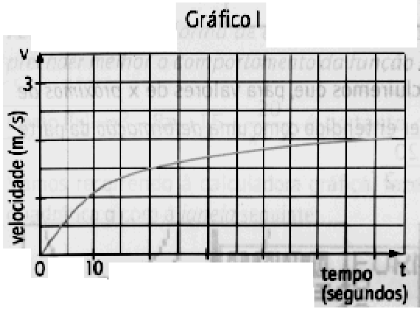
Ficha de Trabalho de Matemática

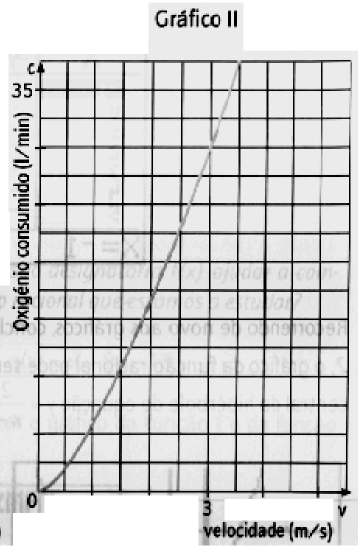
26/04/99 ***Composição de funções. Derivada da função composta*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

Função composta

1. O gráfico I dá-nos a velocidade *v* de um nadador em função do tempo *t*.
O gráfico II dá-nos o consumo *c* de oxigénio do nadador em função da sua velocidade *v*.
t é medido em segundos, *v* em metros por segundo e *c* em litros por minuto.





a) Recorrendo aos gráficos dados, determine o consumo de oxigénio do nadador após 20 segundos de natação.

b) Após quanto tempo de natação é o consumo de oxigénio igual a 15 l/min?

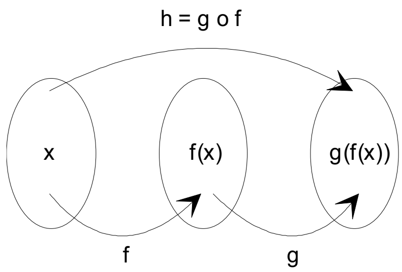
Há situações, como acontece no problema anterior, em que a solução resulta de usarmos uma imagem obtida por uma função, como original para outra função.

Este é um exemplo de como, a partir de duas funções *f* e *g* tais que *f*: $t \to v = f(t)$ e *g*: $v \to g(v)$ se pode construir uma nova função, cuja variável independente é o tempo *t* (variável independente de *f*) e cuja variável dependente é o consumo *c* (variável dependente de *g*), assim definida:

$$t \to c = g(f(t))$$

A expressão $g(f(t))$ lê-se "***g* de *f* de *t***", em que *t* representa qualquer elemento do domínio de *f* cuja imagem $f(t)$ pertence ao domínio de *g*.

Esquematizando



Diz-se, nestas condições, que ***h* é a função composta de *g* com *f*** e escreve-se $h = g \circ f$.

Sendo *f* uma função de domínio D_f e *g* uma função de domínio D_g , chama-se **composta de *g* com *f*** à função $g \circ f$ assim definida:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in D_{g \circ f}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Exemplo

1. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e $g(x)=2x+3$.

a) Calcule $(g\circ f)(-1)$ e $(f\circ g)(0)$.

b) Caracterize $f\circ g$.

c) Caracterize $f\circ g$.

Resolução:

a) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(1)=1$ e $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(3)=\dfrac{1}{3}$.

b)

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in IR : x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in IR : x\in IR \wedge (2x+3)\in IR\setminus\{0\}\} \\ &= \{x\in IR : 2x+3\neq 0\} \\ &= IR\setminus\{-\tfrac{3}{2}\} \end{aligned}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=\frac{1}{2x+3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} fog:\ & IR\setminus\{-\tfrac{3}{2}\}\to IR \\ & x\to \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x\in IR : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\} \\ &= \{x\in IR : x\neq 0 \wedge \frac{1}{x}\in IR\} \\ &= IR\setminus\{0\} \end{aligned}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{x})=2.\frac{1}{x}+3=\frac{2}{x}+3$$

Logo,

$$\begin{aligned} gof:\ & IR\setminus\{0\}\to IR \\ & x\to \frac{2}{x}+3 \end{aligned}$$

Exercícios

2. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x)=x^2$ e $g(x)=4x$.
Caracterize $f\circ g$ e $g\circ f$.

3. Sejam *f*, *g* e *h* três funções polinomiais definidas por:

$$f(x)=x^2 \quad,\quad g(x)=x+3 \quad \text{e} \quad h(x)=x-2$$

Represente graficamente as funções $f\circ g$, $f\circ h$, $g\circ f$, $h\circ f$ e $g\circ h$.

4. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Caracterize $g \circ f$.

Derivada da função composta

> A derivada da função composta de *f* com *g* ($f \circ g$) pode ser obtida através das derivadas das funções *f* e *g*, da seguinte forma:
>
> $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$
>
> ou $D_x y = D_u y . D_x u$, sendo $y = (f \circ g)(x)$ e $y = f(u)$ e $u = g(x)$

Sendo $y = (x^2 + 10)^{20}$, podemos considerar $y = (f \circ g)(x)$ com $f(x) = x^{20}$ e $g(x) = x^2 + 10$.
A derivada de $y = (x^2 + 20)^{20}$ pode ser obtida pela regra da derivação composta, também conhecida como regra de derivação em cadeia, da seguinte maneira:

- $f'(x) = 20x^{19}$
- $g'(x) = 2x$

Logo, $y'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(x^2 + 10) \times (2x) = 20.(x^2 + 10)^{19}.(2x) = 40x.(x^2 + 10)^{19}$.

Exemplos

1. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = 2x + 3$.

a) Calcule $(g \circ f)'(-3)$.

b) Determine $(f \circ g)'(x)$

Resolução:

a) Como $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e $g'(x) = 2$, temos $(g \circ f)'(-3) = g'(f(-3)) \times f'(-3) = g'(-\dfrac{1}{3}) \times (-\dfrac{1}{9}) = 2 \times (-\dfrac{1}{9}) = -\dfrac{2}{9}$.

b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(2x+3) \times 2 = -\dfrac{1}{(2x+3)^2} \times 2 = -\dfrac{2}{(2x+3)^2}$.

2. Mostrar, aplicando a regra de derivação composta, que: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Resolução:

Seja $x > 0$.
Então, $x = (\sqrt{x})^2$.
Assim, derivando em ordem a *x* ambos os membros, temos:

$1 = 2 \times (\sqrt{x})^1 \times (\sqrt{x})'$

Logo, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nota:
$(\sqrt{x})^2 = (f \circ g)(x)$, sendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
Logo, $((\sqrt{x})^2)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = 2\sqrt{x} \times (\sqrt{x})'$.

Exercícios

5. Mostrar, aplicando a regra de derivação composta, que:

a) $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $(\sqrt[3]{u})' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$, com $u = f(x)$

6. Calcule, aplicando a regra de derivação composta:

a) $\left(\sqrt{x^2 - 9}\right)'$

b) $\left(\sqrt[n]{u^p}\right)'$, com $u = f(x)$ e $n \in IN$ e $p \in Q$

<u>SOLUÇÕES</u>

1.

a) Aproximadamente 12,5 l/min.

b) Após aproximadamente 45 segundos.

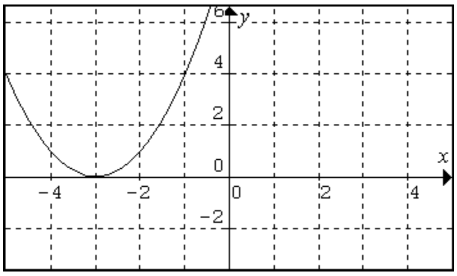
2.

$fog: \quad IR \to IR$ e $gof: \quad IR \to IR$

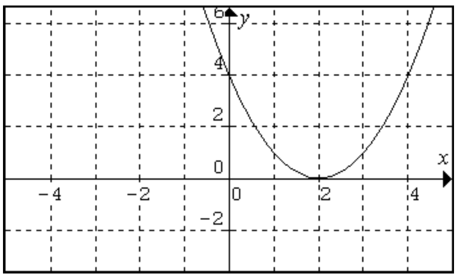
$x \to 16x^2$ $\qquad$ $x \to 4x^2$

3.

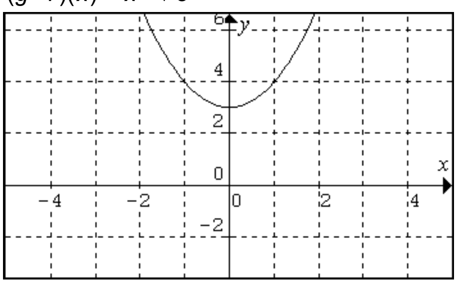
$(f \circ g)(x) = (x+3)^2$



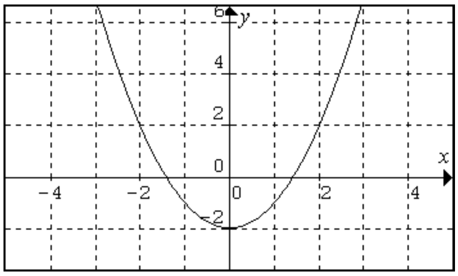
$(f \circ h)(x) = (x-2)^2$



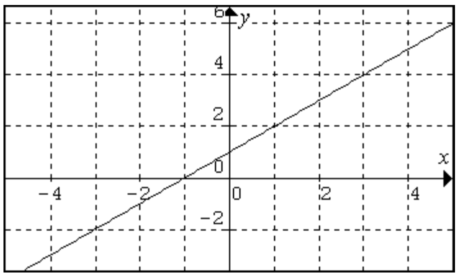
$(g \circ f)(x) = x^2 + 3$



$(h \circ f)(x) = x^2 - 2$



$(g \circ h)(x) = x + 1$



4.

$gof: \quad IR \setminus \{-2{,}1\} \to IR$

$x \to \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

6.

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

b) $\dfrac{p.u^{p-1}.u'}{n.\left(\sqrt[n]{u^p}\right)^{n-1}}$

O Professor