Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

05/05/99 ***Funções exponencial e logarítmica*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.*

1. O valor de $5^{2+\log_5(w+1)}$ é igual a:

[A] $25w+25$.
[B] 5^2+w+1 .
[C] $25\log_5(w+1)$.
[D] $25+\log_5(w+1)$.

2. Sendo $f(x)=3\log_{17} x$ pode afirmar-se que:

[A] $f(a+b)=f(a)+f(b)$.
[B] $f(a+b)=f(a).f(b)$.
[C] $f(a.b)=f(a)+f(b)$.
[D] $f(a.b)=f(a).f(b)$.

3. Sendo $f(x)=e^2$, em que *e* é o número de Neper, qual é o valor de $f'(1)$?

[A] 0.
[B] $2e$.
[C] e^2 .
[D] 1.

4. Sega *g* a função real de variável real, definida por $g(x)=2^x-\text{sen}^2\, x$.
A tangente ao gráfico de *g*, no ponto de abcissa zero, passa pelo ponto de coordenadas:

[A] $(1,\ 1+\log 2)$.
[B] $(0,\ \log 2)$.
[C] $(\log 2\ ,\ 1-\log 2)$.
[D] $(\log 2\ ,\log 2)$.

5. Se $f(x)=e^{\text{sen}\, x}$, então $f'(\pi)$ é:

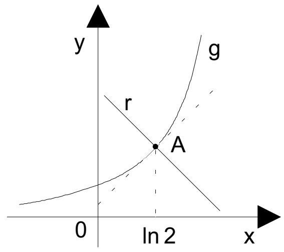
[A] $\frac{1}{e}$.
[B] $-\frac{1}{e}$.
[C] -1 .
[D] 1 .

6. Seja *f* a função real de variável real tal que $f(x)=\dfrac{2^{-x}}{x}$.

Quanto ao $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ pode afirmar-se que:

[A] É $+\infty$.
[B] É $-\infty$.
[C] É 0 (zero).
[D] Não existe.

7. A recta *r* é normal ao gráfico de g: $x \to e^x$ no ponto A de abcissa $\ln 2$.
Uma equação de *r* é:



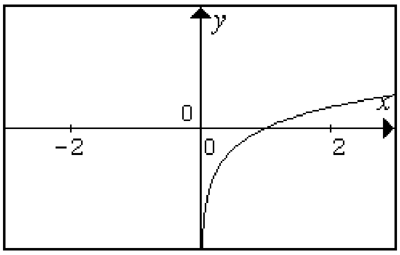
[A] $y = -2x + \ln 4 + 2$.

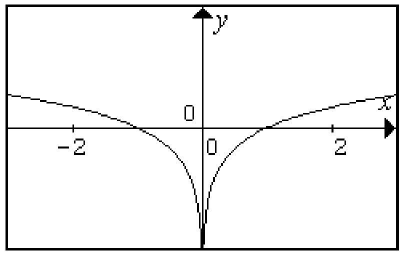
[B] $y = -\frac{1}{2}x + 2\ln\sqrt{2}$.

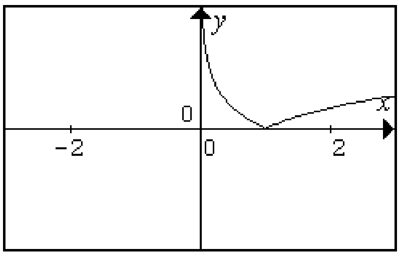
[C] $y = -\frac{1}{2}x + \ln(e^2\sqrt{2})$.

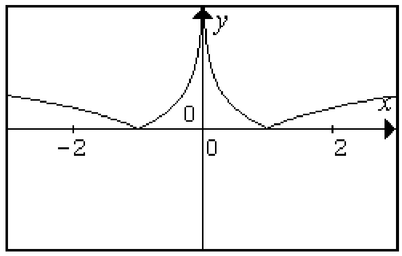
[D] $y = 2x + \frac{1}{2}\ln 2 + e^2$.

8. A representação gráfica da função $x \to \ln|x|$ é a seguinte:

[A]


[B]


[C]


[D]


9. Sendo *f* a função definida por $f(x) = 5^{x^2 - x}$, o valor de *x* tal que $f'(x) = 4 \times f(x)$ é:

[A] 2,5.

[B] $\frac{2}{\ln 5} + 0{,}5$.

[C] $2\ln 5 + 0{,}5$.

[D] $\frac{2}{\ln 5}$.

10. Considere a função *g*: $x \to e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ definida no intervalo $]\pi, 2\pi[$.

a) No intervalo considerado, *g* tem:

[A] Um máximo relativo igual a $\frac{3\pi}{2}$.

[B] Um máximo relativo igual a $\frac{1}{e}$.

[C] Um mínimo relativo igual a $\frac{1}{e}$.

[D] Um mínimo relativo igual a $-e$.

b) Quanto à existência de assimptotas ao gráfico de g, neste intervalo, pode afirmar-se que:

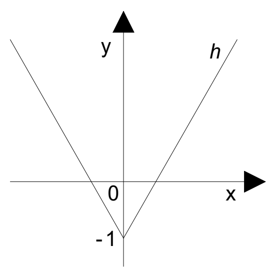
[A] Admite duas: $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

[B] Admite uma: $x = \pi$.

[C] Admite uma: $x = 2\pi$.

[D] Não admite nenhuma.

11. A figura representa parte de duas semi-rectas que são o gráfico de uma função *h*, de domínio *IR*, que tem *Oy* como eixo de simetria. O contradomínio da função $x \to 2^{h(x)}$ é:



[A] $[-1, +\infty[$.

[B] $[-2, +\infty[$.

[C] $]0, +\infty[$.

[D] $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

12. Seja g: $x \to \begin{cases} \dfrac{e^{2kx}-1}{3x} & \Leftarrow \quad x \neq 0 \\ 1 & \Leftarrow \quad x = 0 \end{cases}$.

O valor de k para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano à função g, no intervalo $[-1,1]$ é:

[A] 1. **[B]** $\frac{3}{2}$. **[C]** $\frac{1}{2}$. **[D]** $\frac{2}{3}$.

13. Considere a função h: $IR \to IR$ tal que $h(x) = e^{2x-1}$. O valor de $h'(1)$ é:

[A] 0. **[B]** 1. **[C]** e. **[D]** $2e$.

14. Uma função real de variável real f é tal que $f(0) = 1$.
Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f:

[A] $\frac{x+2}{x-1}$. **[B]** $\frac{\ln x}{x+1}$. **[C]** $tg(3x + \frac{\pi}{2})$. **[D]** $2^{\operatorname{sen} x}$.

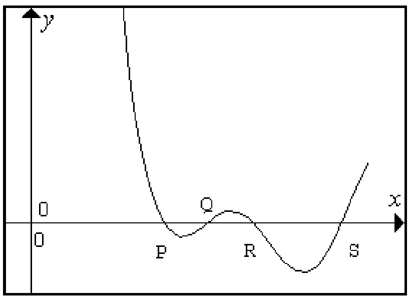
15. Uma função real de variável real f é tal que $f(x) = f'(x)$, para qualquer número real x.
Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f.

[A] $3x^2$. **[B]** $\operatorname{sen} x$. **[C]** e^{5x}. **[D]** $2e^x$.

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^5 e^{-x})$ é:

[A] $-\infty$. **[B]** 0. **[C]** 2. **[D]** $+\infty$.

17. Na figura ao lado pode observar-se parte da representação gráfica da função f definida por $f(x) = \cos(\pi x).\ln(x-1)$.
Os pontos P, Q, R e S são pontos de intersecção do gráfico da função f com o eixo das abcissas.
A abcissa de P é:



[A] $\frac{1}{2}$. **[B]** 1.

[C] $\frac{3}{2}$. **[D]** 2.

18. Sendo f a função definida por $f(x) = x^e$, a expressão analítica de f' é:

[A] x^e. **[B]** x^{e-1}. **[C]** ex^{e-1}. **[D]** $x^e \ln x$.

19. O valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ é

[A] 1. **[B]** $+\infty$. **[C]** $\sqrt{e}$. **[D]** e^2.

20. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 8% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade.
Um cliente desse banco fez um depósito de 100 contos, nessa modalidade.
Qual é, em contos, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados n anos?

[A] $100 + 0{,}8n$. **[B]** $100 \times 1{,}08n$. **[C]** $100 \times 1{,}8^n$. **[D]** $100 \times 1{,}08^n$.

21. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-n}$?

[A] $-\infty$. **[B]** $+\infty$. **[C]** 0 . **[D]** 1 .

22. Para um certo número real k, **é contínua** a função m definida por: $m(x) = \begin{cases} e^{2x} + k & \Leftarrow \quad \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$. O valor de k é

[A] -1 . **[B]** 0 . **[C]** 1 . **[D]** 2 .

23. Seja g: $IR^+ \to IR$ a função definida por $g(x) = \log_2(2.\sqrt[3]{x})$.
Indique qual das expressões seguintes também pode definir a função g.

[A] $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$. **[B]** $2.\log_2(\sqrt[3]{x})$. **[C]** $\dfrac{3 + \log_2 x}{3}$. **[D]** $\dfrac{1 + \log_2 x}{2}$.

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. A intensidade ***I***, em decibéis (dB), de um som audível, pode ser dada por:

$$I = 170 + 10.\log_{10} P$$

onde P é o valor da potência, em certa unidade, do som emitido.

a) Sabe-se que um som com intensidade superior ou igual a 100 dB é prejudicial à saúde.
Conclua daí, a partir de que potência é que devem ser utilizados meios de protecção auditiva.

b) Dois sons de potências P_1 e P_2 são emitidos por uma mesma fonte.
Sabendo que a intensidade do primeiro é dupla da do segundo ($I_1 = 2 \times I_2$), mostre que $\dfrac{P_1}{(P_2)^2} = 10^{17}$.

c) Sendo $\boldsymbol{I} : P \to 170 + 10.\log_{10} P$,

c1) Calcule $\lim\limits_{P \to +\infty} \dfrac{I(P)}{P}$ e investigue se o gráfico de ***I*** admite assimptotas não verticais.

c2) Caracterize I^{-1}, função inversa de ***I***.

2. Para obter o povoamento de coelhos em certa região libertaram-se nela alguns casais desta espécie. Sabe-se que os coelhos se reproduzem exponencialmente, segundo uma lei do tipo:

$$C(t) = k.a^t \quad (k,\ a,\ \text{positivos})$$

sendo $C(t)$ o número de coelhos existentes t meses após o início do povoamento.

a) Suponha $k = 10$ e $a = 1{,}2$.

a1) Quantos coelhos foram libertados inicialmente naquela região?

a2) Quando o número de coelhos ultrapassar 1000, pode gerar-se desequilíbrio na cadeia alimentar. Ao fim de quantos meses ocorrerá tal possibilidade?

a3) Indique um valor aproximado, a menos de 0,01, da velocidade de crescimento do número de coelhos 5 meses após o início do povoamento.

b) Suponha agora que não eram conhecidas as constantes k e a, mas apenas os resultados de duas contagens: Ao fim de um ano, após o início do povoamento, contaram-se 163 coelhos e, decorridos mais 6 meses, contaram-se 787 coelhos.
Calcule, neste caso, os valores de k e de a com aproximação às centésimas.

3. Coloca-se um produto solúvel num recipiente com água. Em cada instante t (em minutos) a quantidade do produto ainda não dissolvido é (em gramas):

$$q(t) = \frac{60}{5.e^{0{,}09.t} - 3} \qquad \text{com } t \geq 0 .$$

a) Qual a quantidade de produto colocada inicialmente na água?

b) Ao fim de quanto tempo estão ainda por dissolver 20 gramas de produto?
(Aproximação à milésima do minuto)

c) Estude a monotonia da função definida em IR_0^+ por $q(t)$ e interprete os resultados relativamente à situação inicialmente apresentada.

d) Considere a função Q, de variável real, definida por $Q(x) = \dfrac{60}{5.e^{0{,}09.x} - 3}$.
Estude a existência de assimptotas do gráfico de Q.

4. Numa empresa o lucro L, originado pela produção de n peças, é dado em milhares de contos por

$$L(n) = \log_{10}(100 + n) + k \qquad \text{com } k \text{ constante real.}$$

a) Sabendo que não havendo produção não há lucro, determine k e mostre que $L(n) = \log_{10}(1 + 0{,}01.n)$.

b) Qual é o número mínimo de peças que é necessário produzir para que o lucro seja superior a 1 milhar de contos?

c) Justifique que, apesar do lucro ir aumentando à medida que o número de peças produzidas aumenta, essa variação vai sendo feita de forma cada vez mais lenta.

d) Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[n.L(\frac{1}{n}) \right]$.

5. Numa pastelaria a temperatura ambiente é constante. Admita que a temperatura, em graus centígrados, de um café servido nessa pastelaria, *t* minutos após ter sido colocado na chávena, é dada por

$$f(t) = 20 + 50.e^{-0{,}04.t} \quad , \; t \in [0, +\infty[\quad (e \text{ designa o número de Neper})$$

a) Determine a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.

b) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas, à monotonia e ao sentido das concavidades. Esboce o gráfico de *f*.

c) Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indique, justificando, a temperatura ambiente.

d) Justifique a seguinte afirmação: ***a taxa de variação média da função f, em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa***.

e) Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65 graus centígrados? Apresente o resultado em minutos e segundos.

NOTA: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos conser ve no mínimo três casas decimais.

6. A actividade *R*, de uma qualquer substância radioactiva, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão

$$R(t) = A \times e^{-B.t}$$

em que *A* e *B* são constantes reais positivas e *t* é o tempo em horas, com $t \geq 0$.

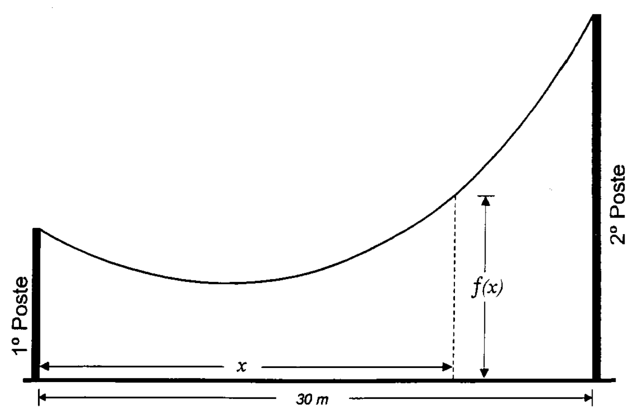
a) Estude a função *R* quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas.

b) Designando por *R'* a derivada de *R*, mostre que *R* e *R'* são directamente proporcionais.

c) Mostre que o tempo necessário para que a actividade *R* passe do seu valor inicial para metade é $\frac{\ln 2}{B}$.

d) Sabendo que o valor inicial da actividade de uma certa substância radioactiva é 28 unidades e que $R(1) = 26$, determine os valores de *A* e *B* para essa substância.

7. Um fio encontra-se suspenso entre dois postes. A distância entre ambos é de 30 metros.



Considere a função *f* definida por $f(x) = 5.(e^{1-0{,}1x} + e^{0{,}1x-1})$.
Admita que $f(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado *x* metros à direita do primeiro poste.

a) Determine a diferença de altura dos dois postes.
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas.

NOTA: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Recorrendo ao estudo da derivada da função *f*, determine, justificando, a distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo.

8. Seja f a função definida em IR^+ por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$.

a) Mostre que $f(x) = 3 + \log_2 x$, para qualquer $x \in IR^+$.

b) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de *f* com a recta de equação $y = 8$.

9. De uma certa função *f*: $IR^+ \to IR$ sabe-se que:

- $f(1) = 0$
- a sua **derivada**, *f'*, é definida por $f'(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

a) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

b) Poderá concluir-se que f é contínua para $x = 1$? Justifique a sua resposta.

c) Mostre que $f''(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ e estude *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

10. A magnitude *M* de um sismo e a energia total *E* libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação

$$\log_{10} E = 5{,}24 + 1{,}44M \quad \text{(a energia } E \text{ é medida em Joule)}$$

a) Um físico português estimou que o terramoto de Lisboa de 1755 teve magnitude 8,6.
Mostre que a energia total libertada nesse sismo foi aproximadamente $4{,}2 \times 10^{17}$ Joule.

b) A ponte *Vasco da Gama* foi concebida para resistir a um sismo cuja energia total libertada seja cinco vezes a do terramoto de Lisboa de 1755. Qual será a magnitude de um tal sismo? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondando às décimas.

11. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia.
A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, *t* horas após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2.t.e^{-0,3.t}$$

a) Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 9 h 30 min e as 10 h, em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.

c) Recorrendo à derivada da função *C*, determine o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima. Apresente o resultado em horas e minutos.

<u>SOLUÇÕES</u>

1.ª Parte

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10-a*	*10-b*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*
A	**C**	**A**	**A**	**C**	**B**	**C**	**B**	**B**	**B**	**D**	**D**	**B**	**D**	**D**	**D**	**B**	**C**	**C**	**D**	**D**	**D**	**B**	**C**

2.ª Parte

1.

a) A partir de potências superiores ou iguais a 10^{-7} dB devem ser utilizados meios de protecção auditiva.
($I \geq 100 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow P \geq 10^{-7}$)

b) $I_1 = I_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \dfrac{P_1}{(P_2)^2} = 10^{17}$

c1) $\lim\limits_{P\to+\infty} \dfrac{I(P)}{P} = ... = \lim\limits_{P\to+\infty} \dfrac{170}{P} + \dfrac{10}{\ln 10} \times \lim\limits_{P\to+\infty} \dfrac{\ln P}{P} = 0 + 0 = 0$.
O gráfico da função *I* não admite assimptota não vertical, quando $x \to +\infty$.
($b = \lim\limits_{P\to+\infty} (I(P) - 0 \times P) = ... = +\infty$)

c2)
$I^{-1}: \quad IR \to IR^+$

$\qquad I \to 10^{\frac{I-170}{10}}$

2.

a1) Foram inicialmente libertados 10 coelhos.
($C(0) = 10 \times 1{,}2^0 = 10$)

a2) Ao fim de 26 meses o número de coelhos é maior do que 1000.
($C(t) > 1000 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t > 25{,}3$ (1 c.d.))

a3) A velocidade de crescimento do número de coelhos, 5 meses após o início do povoamento, é de 4,54 coelhos por mês.
($C'(5) = 10 \times 1{,}2^5 \times \ln 1{,}2 = 4{,}54$ (2 c.d.))

b) $k = 6{,}99$ e $a = 130$, com aproximação às centésimas.

3.

a) Foram colocados inicialmente 30 gramas de produto na água.
($q(0) = \dfrac{60}{5.e^0 - 3} = 30$)

b) Ao fim de 2,026 minutos (aproximação à milésima) estão ainda por dissolver 20 gramas de produto.
($q(t) = 20 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = 2{,}026$ (3 c.d.))

c) $q'(t) = -\dfrac{2{,}7.e^{0{,}09.t}}{(5.e^{0{,}09.t} - 3)^2}$;

$q'(t)$ não tem zeros;

$q'(t) < 0, \ \forall t \in IR_0^+$;

q é estritamente decrescente em IR_0^+ ;

$q(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = ... = 0$.

No contexto da situação apresentada, os resultados obtidos permitem-nos concluir que foram colocados inicialmente 30 gramas de produto solúvel no recipiente com água. Com o decorrer do tempo, o produto foi-se dissolvendo na água, diminuindo, consequentemente, a quantidade de produto não dissolvido. Finalmente, em termos teóricos, verifica-se que o produto nunca se dissolve completamente na água, pois $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 0$.

d) $D_Q = IR \setminus \{\frac{100}{9}.\ln\frac{3}{5}\}$.

A recta de equação $x = \dfrac{100}{9}.\ln\dfrac{3}{5}$ é uma assimptota vertical (bilateral) do gráfico de *Q*.

A recta de equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal (em torno de $+\infty$) do gráfico de *Q*.
A recta de equação $y = -20$ é uma assimptota horizontal (em torno de $-\infty$) do gráfico de *Q*.

4.

a) $L(0) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow k = -2$.
Substituindo *k* por -2 em $L(n)$, vem $L(n) = \log_{10}(1 + 0{,}01.n)$.

b) Para se obter um lucro superior a 1 milhar de contos tem que se produzir no mínimo 901 peças.
($L(n) > 1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow n > 900$)

c) Considere-se $L(n)$ a restrição a IN da função $L(x) = \log_{10}(1 + 0{,}01.x)$ definida em IR^+.

$$L'(x) = \frac{0{,}01}{(1 + 0{,}01.x).\ln 10} > 0, \ \forall x \in IR^+$$

$$L''(x) = -\frac{0{,}0001}{(1 + 0{,}01.x)^2.\ln 10} < 0, \ \forall x \in IR^+$$

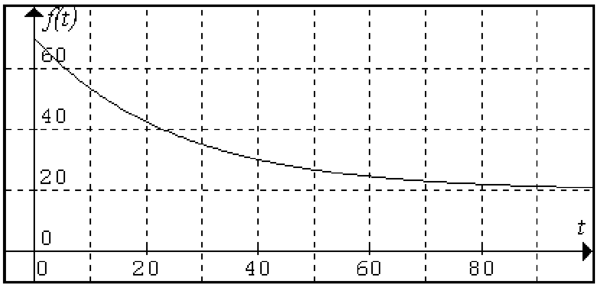
Porque $L'(x) > 0$, a função *L* é estritamente crescente. Portanto, o lucro vai aumentando à medida que o número de peças produzidas aumenta.
Por que $L''(x) < 0$, a velocidade de crescimento (do lucro) é negativa. Em consequência, o lucro vai aumentando de forma cada vez mais lenta.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[n.L(\frac{1}{n}) \right] = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[n.\log_{10}(1 + \frac{0{,}01}{n}) \right] = ... = \frac{1}{100.\ln 10}$.

5.

a) No instante em que é colocado na chávena, a temperatura do café é de 70 º C.
($f(0) = 20 + 50.e^0 = 70$)

b) *Assimptotas*:
O gráfico de *f* não tem assimptotas verticais, porque a função é contínua em IR_0^+.
A recta de equação $y = 20$ é uma assimptota horizontal (em torno de $+\infty$) do gráfico de *f*.



Monotonia:
$f'(t) = ... = -2.e^{-0{,}04.t}$
f é estritamente de crescente, pois
$f'(t) < 0, \ \forall t \in IR_0^+$.

Sentido da concavidade do gráfico:
$f''(t) = ... = 0{,}08.e^{-0{,}04.t}$
O gráfico de *f* tem sempre a concavidade voltada para cima, pois $f''(t) > 0, \ \forall t \in IR_0^+$.

Esboço do gráfico:
(Ver ao lado)

c) A temperatura ambiente é de 20 º C.
($\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = ... = 20$)

d) A taxa de variação média da função é negativa em qualquer intervalo do seu domínio porque *f* é estritamente decrescente em todo o seu domínio.

e) O tempo decorrido foi de aproximadamente 2 minutos e 38 segundos.
($f(t) = 65 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = 2{,}634$ (3 c. d.))

6.

a) *Assimptotas*:
O gráfico de *R* não tem assimptotas verticais, porque a função é contínua em IR_0^+.
A recta de equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal (em torno de $+\infty$) do gráfico de *R*.

Monotonia:
$R'(t) = ... = -AB.e^{-B.t}$
R é estritamente de decrescente, pois $R'(t) < 0, \ \forall t \in IR_0^+$.
(Em alternativa, como $R(t) = ... = A \times (\frac{1}{e})^{Bt}$ a função é estritamente decrescente, pois $(\frac{1}{e})^{Bt}$ e decrescente porque se trata de uma função exponencial de base compreendida entre 0 e 1, sendo A positivo e $B.t \geq 0$.)

b) $\frac{R(t)}{R'(t)} = ... = -\frac{1}{B}$. Porque *B* é uma constante positiva, então $-\frac{1}{B}$ é também uma constante (negativa). Logo, *R* e *R'* são directamente proporcionais.

c) O valor inicial é $R(0) = ... = A$.

$R(t) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{B}$.

d)

$$\begin{cases} R(0) = 28 \\ R(1) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \ ... \ \Leftrightarrow \begin{cases} A = 28 \\ B = \ln\frac{14}{13} \end{cases}$$

7.

a) A diferença de altura dos postes é aproximadamente 22,2 metros.
($f(30) - f(0) = ... \approx 22{,}2$)

b) A distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo é de 10 metros.
$f'(x) = ... = 0{,}5.(e^{0{,}1x-1} - e^{1-0{,}1x})$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 10$
Podemos considerar a figura do enunciado como sendo o gráfico de *f* (imaginando um referencial em que o eixo das abcissas esteja sobre o solo e o das ordenadas sobre o primeiro poste). O único valor que anula *f'* é necessariamente o ponto onde *f* toma o seu valor mínimo.

8.

a) Utilize regas operatórias de logaritmos.

b) O ponto considerado tem abcissa 32.
($3 + \log_2 x = 8 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 32$)

9.

a) O declive dessa recta é $m = f'(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$ e o ponto de tangência é P (1, $f(1)$).
Logo, $y = x - 1$ é a equação reduzida dessa recta.

b) Sim. Porquê?

c) O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, 1[$ e a concavidade voltada para baixo no intervalo $]1, +\infty[$. O ponto de coordenadas (1, 0) é um ponto de inflexão do gráfico da função.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$f''(x) > 0, \ \forall x \in]0, 1[$
$f''(x) < 0, \ \forall x \in]1, +\infty[$

10.

a) $\log_{10} E = 5{,}24 + 1{,}44 \times 8{,}6 \Leftrightarrow \log_{10} E = 17{,}624 \Leftrightarrow E = 10^{17{,}624}$
Logo, $E = 4{,}2 \times 10^{17}$ Joule, aproximadamente.

b) Como $M = \frac{\log_{10} E - 5{,}24}{1{,}44}$ e $E = 5 \times 4{,}2 \times 10^{17}$, vem $M = \frac{17 + \log_{10} 21 - 5{,}24}{1{,}44} = 9{,}1$ (1 c. d.).
A magnitude de tal sismo é 9,1.

11.

a) *C* é contínua no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, pois é o produto e composta de funções contínuas em *IR*.
É $C(\frac{1}{2}) \approx 0{,}86$ e $C(1) \approx 1{,}48$, logo $C(\frac{1}{2}) < 1 < C(1)$.

b) A concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima às 12 h e 20 min.
$C'(t) = 2e^{-0{,}3.t} - 0{,}6.t.e^{-0{,}3.t}$
$C'(t) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$

O Professor