

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

21/05/2004

Turmas A e B - Provas 1 e 2

12.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	D	B	D	A	B
Questão	4	3	1	2	5
Prova 2	B	D	A	C	C

2.ª Parte

1.

a)

Com os 9 algarismos considerados podemos formar ${}^9A_4' = 9^4 = 6561$ números de quatro algarismos (nove hipóteses para cada um dos quatro algarismos).

Os números favoráveis têm exactamente dois algarismos 5, podendo estes algarismos figurar em ${}^4C_2 = 6$ posições diferentes. Para cada uma destas 6 configurações, obtêm-se ${}^8A_2' = 8^2 = 64$ números nas condições pretendidas (há oito hipóteses para cada posição, os nove algarismos iniciais excepto o algarismo 5).

Deste modo, existem $NCF = {}^4C_2 \times {}^8A_2' = 6 \times 64 = 384$ números nas condições pretendidas.

Assim, $p = \frac{384}{6561} \approx 6\%$ é a probabilidade pedida.

b)

Os números pretendidos são da forma 9 _ _ _ .

Como a soma dos seus quatro algarismos é par, conclui-se que a soma dos 3 algarismos em falta é ímpar. Portanto, existem duas hipóteses: (A) os 3 algarismos em falta são ímpares ou (B) 2 são pares e 1 é ímpar.

Na hipótese A, apenas temos disponíveis os algarismos 1, 3, 5 e 7, pelo que podemos formar $N_1 = {}^4A_3 = 24$ números nas condições pretendidas.

Na hipótese B, estão disponíveis os algarismos ímpares 1, 3, 5 e 7 e todos os pares (2, 4, 6 e 8). O algarismo ímpar pode ocupar 3 posições diferentes, podendo esta posição ser preenchida de 4 maneiras diferentes (pois existem 4 algarismos ímpares disponíveis). Resta preencher duas posições com dois dos quatro algarismos pares disponíveis, que pode ser feito de ${}^4A_2' = 16$ maneiras diferentes.

Logo, nesta hipótese B existem $N_2 = {}^3C_1 \times {}^4A_1 \times {}^4A_2' = 3 \times 4 \times 12 = 144$ números que satisfazem o pedido.

Assim, o número pedido é $N = N_1 + N_2 = 168$.

2.

a)

$$(1 + 2i).z = 6 + z_1 \times \bar{z}_1 \Leftrightarrow (1 + 2i).z = 6 + (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2i).z = 6 + 1 + 3$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10 - 20i}{1 + 4}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 - 4i$$

b)

Como $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \neq 1$, o número complexo z_1 não pertence a A.

Como $z_2 = \text{cis}(-\frac{\pi}{5}) = \cos(-\frac{\pi}{5}) + i \text{sen}(-\frac{\pi}{5})$, então $\text{Im}(z_2) = \text{sen}(-\frac{\pi}{5}) < 0$.

Logo, também z_2 não pertence a A.

c)

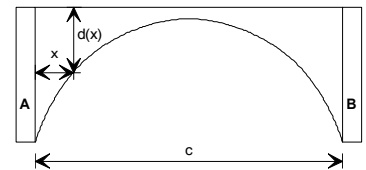
Sendo $\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \text{sen} \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, podemos considerar $z_1 = 2 \text{cis}(\frac{\pi}{3})$.

Logo, $\frac{(z_1)^3}{z_2} = \frac{(2 \text{cis}(\frac{\pi}{3}))^3}{\text{cis}(-\frac{\pi}{5})} = \frac{2^3 \text{cis}(3 \times \frac{\pi}{3})}{\text{cis}(-\frac{\pi}{5})} = 8 \text{cis}(\pi + \frac{\pi}{5}) = 8 \text{cis}(\frac{6\pi}{5})$.

3.

a)

Em metros, as alturas dos pilares A e B são dadas, respectivamente, por $d(0) = 10 - 3 \ln(9)$ e $d(c) = 10 - 3 \ln(-c^2 + 8c + 9)$. Como os pilares têm a mesma altura, vem:



$$\begin{aligned} 10 - 3 \ln(-c^2 + 8c + 9) &= 10 - 3 \ln(9) \Leftrightarrow -c^2 + 8c + 9 = 9 \\ &\Leftrightarrow c(8 - c) = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \vee c = 8 \end{aligned}$$

Portanto, o vão do arco é de 8 metros.

b)

Ora, $d'(x) = (10 - 3 \ln(-x^2 + 8x + 9))' = -3 \times \frac{(-x^2 + 8x + 9)'}{(-x^2 + 8x + 9)} = -3 \times \frac{-2x + 8}{(-x^2 + 8x + 9)} = \frac{6x - 24}{-(x+1)(x-9)}$, $x \in [0, 8]$.

x	$-\infty$	-1		0		4		8		9	$+\infty$
$6x - 24$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$-x^2 + 8x + 9$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$d'(x)$				-	-	0	+	+			
$d(x)$					↘	mín		↗			

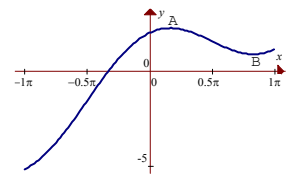
Confirma-se, assim, que é num ponto equidistante dos dois pilares que a distância do arco ao tabuleiro da ponte é mínima.

4.

a)

Temos $g'(x) = 1 - 2 \text{sen } x$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Como $1 - 2 \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que os zeros de g' no intervalo $[0, \pi]$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.



Assim, considerando a representação gráfica de g , podemos concluir que a abscissa do ponto B é $\frac{5\pi}{6}$, pelo que

a sua ordenada é $g(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} + 2 \cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$, c.q.m..

b)

Temos $g''(x) = -2 \cos x$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Ora, $-2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

No intervalo $[-\pi, \pi]$, g'' anula em $x = -\frac{\pi}{2}$ e em $x = \frac{\pi}{2}$, mudando de sinal em cada um desses pontos. Logo, as abscissas pedidas são $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	$+\pi$
$g''(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

5.

a1)

Como f é uma função contínua em $]-\infty, 0[$ (pois é o quociente de duas funções contínuas nesse intervalo e a função divisor não se anula nesse mesmo intervalo) e em $]0, +\infty[$ (pois é a soma de duas funções contínuas), apenas poderá haver assíntota vertical em $x = 0$.

$$\text{Ora, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(2x) - \cos x) = -1.$$

Portanto, a recta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical (unilateral) do gráfico de f .

Como não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = -\infty$, não existe qualquer assíntota horizontal ao gráfico de f .

a2)

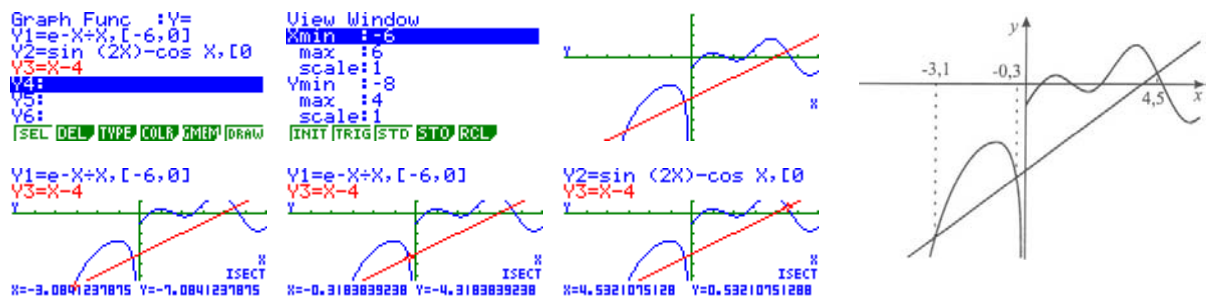
Sendo $\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{-e^{-x} \cdot x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$, temos:

x	$-\infty$	-1		0
$-e^{-x}$	-	-	-	
$x+1$	-	0	$+$	
$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$	$+$	0	-	
$f(x)$	\nearrow	$-e$	\searrow	

A função f tem um máximo no intervalo $]-\infty, 0[$, que é igual a $-e$, pois $f(-1) = \frac{e^{-1}}{-1} = -e$.

b)

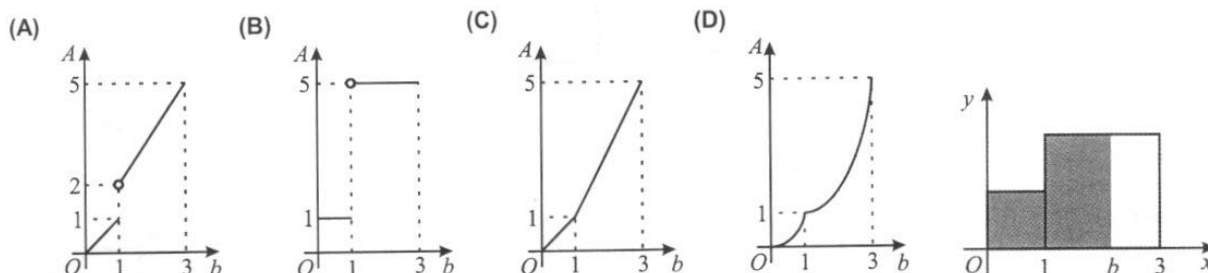
Definidas as funções $y_1 = \frac{e^{-x}}{x}$ (em $[-6, 0[$), $y_2 = \sin(2x) - \cos x$ (em $[0, 6]$) e $y_3 = x - 4$, depois de ajustada uma janela de visualização adequada ao intervalo dado, procuraram-se as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico de y_3 com os gráficos de y_1 e y_2 :



Da análise do gráfico, concluímos que as soluções inteiras da inequação $f(x) > x - 4$ pertencentes ao intervalo $[-6, 6]$ são: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e 4 .

Opção

A.



Para $b = 0$, como podemos verificar na figura, a área referida é nula. Logo, fica excluída a opção B.

Quando $b \in [0, 1]$, a área referida é dada por $A = b \times 1 \Leftrightarrow A = b$ (função de proporcionalidade directa), logo também devemos excluir a opção D.

Interpretando dinamicamente a figura dada, constatamos que $\lim_{b \rightarrow 1^-} A(b) = \lim_{b \rightarrow 1^+} A(b) = A(1) = 1$, isto é, a área é 1 para $b = 1$ e é tão próxima de 1 quanto se queira, desde que se considere b suficientemente próximo de 1. Logo, a opção A também não é correcta.

Portanto, a função só pode estar representada graficamente na opção C.

B.

Ora, $f'(x) = e \times \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Os declives das r e s são, respectivamente, iguais a $f'(a) = -\frac{e}{a^2}$ e $f'(b) = -\frac{e}{b^2}$ (ambos valores negativos).

Logo, as rectas r e s não podem ser perpendiculares, pois, sendo os seus declives ambos negativos, não é verdade que $f'(b) = -\frac{1}{f'(a)}$ (os seus declives sejam simétricos e inversos um do outro).

C.

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 2 \cos x) - (0 + 2 \cos 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \cos x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \times \frac{\cos x - 1}{x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \times \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \times \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \times \frac{\text{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)}\right) = \\ &= 1 - 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\cos x + 1}}_0 = 1 - 2 \times 0 = 1 \end{aligned}$$

FIM

- (1) Se o gráfico de f tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa p , então terá de haver mudança de sentido da concavidade do gráfico nesse mesmo ponto. Logo, a segunda derivada terá de ter sinal diferente, antes e depois de esse ponto. Recorde ainda o sentido da concavidade do gráfico de uma função num dado intervalo e o sinal da segunda derivada nesse mesmo intervalo.
- (2) Como a função é contínua em todo o seu domínio, o seu gráfico não pode ter qualquer assíntota vertical. Como o gráfico tem uma única assíntota, ela existirá na vizinhança de $+\infty$, sendo, por isso, horizontal ou oblíqua.
Dado que é $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2} \neq 0$, não poderá ser horizontal e, por isso, é oblíqua com declive $\frac{1}{2}$.
- (3) Recorde o desenvolvimento do Binómio de Newton e confirme que $k = {}^8C_3 = {}^8C_5 = 56$.
- (4) Repare que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \overline{DC} - \overline{BC} = 10 - 4 = 6$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \overline{DC} = 10$.
- (5) Dado que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, vem $p(B) = 40\%$. Logo, $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{10\%}{40\%} = \frac{1}{4}$.