Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

02/06/99 **Turma A - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**A**	**C**	**B**	**D**
Questão	*4*	*5*	*2*	*1*	*3*
Prova 2	**G**	**H**	**E**	**G**	**F**

2.ª Parte

1.

a) $C(0)=\dfrac{20}{1+3\times e^0}=\dfrac{20}{1+3\times 1}=5$; Partiu-se de 5 mg de biomassa.

$C(t)=15 \Leftrightarrow 15+45.e^{-0,5.t}=20 \Leftrightarrow e^{-0,5.t}=\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow -0,5.t=\ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow -0.5.t=-\ln 9 \Leftrightarrow t=2\ln 9$

Como $2\ln 9=4,394449$ (6 c.d.), até que a massa foi de 15 mg decorreram 4 h e 24 minutos.

b1)

$$C'(t)=\frac{-20\times(1+3.e^{-0,5.t})'}{(1+3.e^{-0,5.t})^2}=\frac{-20\times(-0,5\times 3.e^{-0,5.t})}{(1+3.e^{-0,5.t})^2}=\frac{30.e^{-0,5.t}}{(1+3.e^{-0,5.t})^2}$$

$$C''(t)=\frac{-15.e^{-0,5.t}\times(1+3.e^{-0,5.t})^2-2\times(1+3.e^{-0,5.t})\times(-1,5.e^{-0,5.t})\times 30.e^{-0,5.t}}{(1+3.e^{-0,5.t})^4}$$

$$=\frac{-15.e^{-0,5.t}\times(1+3.e^{-0,5.t})-2\times(-1,5.e^{-0,5.t})\times 30.e^{-0,5.t}}{(1+3.e^{-0,5.t})^3}=\frac{-15.e^{-0,5.t}-45.e^{-t}+90.e^{-t}}{(1+3.e^{-0,5.t})^3}=\frac{15.e^{-0,5.t}\times(3.e^{-0,5.t}-1)}{(1+3.e^{-0,5.t})^3}$$

Como $e^{-0,5.t}>0,\ \forall t\in IR$, temos:

$C'(t)=0 \Leftrightarrow t\in\varnothing$

$C''(t)=0 \Leftrightarrow 3.e^{-0,5.t}-1=0 \Leftrightarrow e^{-0,5.t}=\frac{1}{3}=-0,5.t=\ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,5.t=-\ln 3 \Leftrightarrow t=2\ln 3$

Sendo $f(t)=3.e^{-0,5.t}-1$, temos $f'(t)=-1,5.e^{-0,5.t}<0,\ \forall t\in IR$. Portanto, *f* é contínua e estritamente decrescente no seu domínio, sendo positiva antes do zero e negativa depois do zero.

Assim, temos:

t	0		$2\ln 3$	$+\infty$
$C'(t)$	+	+	+	+
$C''(t)$	+	+	0	-
$C(t)$	5	↗ $\cup$	10	↗ $\cap$
			P.I.	

$C(2\ln 3)=\dfrac{20}{1+3.e^{-\ln 3}}=\dfrac{20}{1+3.e^{\ln\frac{1}{3}}}=\dfrac{20}{1+3\times\frac{1}{3}}=10$.

A função é estritamente crescente, o ponto de coordenadas ($2\ln 3$, 10) é o único ponto de inflexão do gráfico da função e o sentido das as concavidades é o indicado acima.

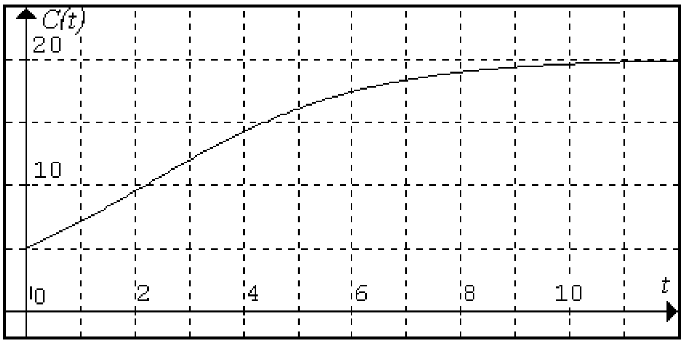
b2) A função é contínua, pois é o quociente de funções contínuas, não se anulando a função denominador. Assim, apenas poderá haver uma assimptota não vertical em torno de $+\infty$.

$$m=\lim_{t\to+\infty}\frac{C(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{20}{t\times(1+3.e^{-0,5.t})}=\frac{20}{(+\infty)\times(1+3\times 0)}=0$$

$$b=\lim_{t\to+\infty}(C(t)-0.t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{20}{1+3.e^{-0,5.t}}=\frac{20}{1+3\times 0}=20$$

Portanto, a recta de equação $y=20$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *C* em torno de $+\infty$.

c) Partindo de uma massa de 5 *mg*, a biomassa da cultura bacteriana foi aumentando com o decorrer do tempo, aproximando-se dum valor final próximo de 20 *mg*, mas inferior (tenha em conta a assimptota e o facto da função ser estritamente crescente).



Tendo em consideração o sinal da segunda derivada de *C* (tenha em atenção o sentido das concavidades do gráfico da função), podemos concluir que a aceleração de crescimento da biomassa é positiva até $t=2\ln 3$, passando então a ser negativa. Portanto, decorrido aproximadamente 2h e 12 min iniciou-se a travagem do crescimento da biomassa.

2.

a) $D_f=\{x\in IR:\ x-1>0\ \wedge\ \ln(x-1)\neq 0\}=\left]1,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

$$\frac{1}{f(x)}<2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\ln(x-1)<2\\ x\in D_f\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\ln(x-1)<\ln e^2\\ x\in D_f\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x-1<e^2\\ x\in D_f\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x<e^2+1\\ x\in D_f\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x\in\left]1,\ e^2+1\right[\setminus\{2\}$$

(Tenha em consideração que a função $x\to\ln x$ é estritamente crescente.)

b) *Determinação de assimptotas verticais*:
A função é contínua no seu domínio. Portanto, existem apenas dois pontos, $x=1$ e $x=2$, onde poderão haver assimptotas verticais.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln(x-1)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\ln(x-1)})=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\ln(x-1)})=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Portanto, apenas recta de equação $x=2$ é uma assimptota vertical bilateral do gráfico de *f*.

Determinação de assimptotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x.\ln(x-1)}=\frac{1}{(+\infty)\times(+\infty)}=0$$

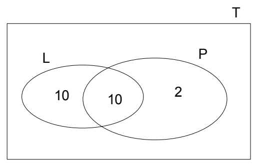
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0.x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x-1)})=\frac{1}{+\infty}=0$$

Portanto, a recta de equação $y=0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f* em torno de $+\infty$.

c) Tendo em consideração que o contradomínio da função $x\to\ln(x-1)$ é IR (note que o gráfico desta função se pode obter por translação associada ao vector $\vec{u}=(1,0)$ do gráfico da função $x\to\ln x$), facilmente se concluirá que o contradomínio de *f* será $D'_f=IR\setminus\{0\}$.(Tenha em conta o contradomínio da função $x\to\frac{1}{x}$)

Sendo $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$, virá $\ln(x-1)=\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow x-1=e^{\frac{1}{y}}\Leftrightarrow x=1+e^{\frac{1}{y}}$. Assim, $\begin{array}{ll} f^{-1}: & R\setminus\{0\}\to\left]1,+\infty\right[\setminus\{2\} \\ x\to & 1+e^{\frac{1}{x}}\end{array}$

3.



a) A turma é constituída por 22 alunos, visto: $\#T = \#L + \#P - \#(L \cap P) = 20 + 12 - 10 = 22$.

b) Como não interessa a ordem como essa comissão é constituída e os seus elementos são distintos, essa comissão pode ser constituída de $C_2^{22} = 231$ maneiras distintas.

c) $NCP = 231$ e $NCF = C_2^{10} + C_2^{10} + C_2^{2} + C_1^{10} \times C_1^{10} + C_1^{10} \times C_1^{2} = 211$. Logo, $p = \dfrac{211}{231}$.

Ou, dado que o número de casos desfavoráveis é $C_1^{2} \times C_1^{10} = 20$, será $p = 1 - \dfrac{20}{231} = \dfrac{211}{231}$.

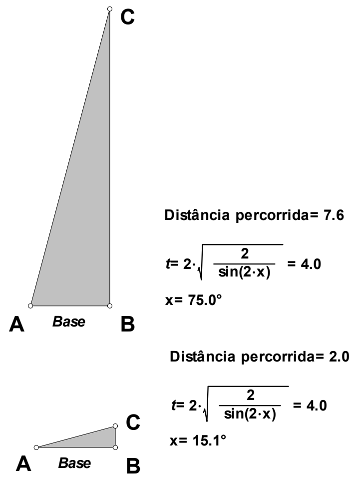
4.

a) Como a área do sector circular é um quarto do círculo do qual teve origem, o seu raio é 2 unidades, visto ser $\pi = \dfrac{\pi \times r^2}{4}$. Assim, temos A (3, 0, 0), B (3, 3, 0) e F (0, 2, 0).

b) Como $\vec{EF} = (0,2,0) - (2,0,0) = (-2,2,0)$, considerando $P\,(x, y, z)$ um ponto genérico de α, será $\vec{AP} . \vec{EF} = 0$, donde $(x-3, y-0, z-0).(-2,2,0) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y + 6 = 0$.
Portanto, $x - y = 3$ é uma equação cartesiana do plano α.

c) A superfície gerada é a semi-superfície esférica de centro na origem, raio 2 unidades e limitada pelo plano coordenado yOz. Logo, uma condição que a define é $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \wedge \quad x \geq 0$.

5. Substituindo os valores fornecidos, temos: $4 = \sqrt{\dfrac{2 \times 19{,}6}{9{,}8 \times \operatorname{sen}(\alpha).\cos(\alpha)}}$



Mas, $4 = \sqrt{\dfrac{4}{\operatorname{sen}(\alpha).\cos(\alpha)}} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{\dfrac{8}{2\operatorname{sen}(\alpha).\cos(\alpha)}} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{\dfrac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}}$.

Portanto, $\operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{1}{2}$.

Como o ângulo α é agudo, vem $2\alpha = 30^\circ$ e, portanto, $\alpha = 15^\circ$.
Mas, há outra solução: $2\alpha = 150^\circ$ e, portanto, $\alpha = 75^\circ$.

Parece impossível, mas é verdade!
Está a faltar observar um pormenor importante.
Repare na figura ao lado que é bastante esclarecedora.
(Note que são significativamente diferentes as distâncias percorridas pelo bloco ao deslizar pelos dois planos inclinados.)

O Professor

---

(1) Substituindo x por $\sqrt{2}$, temos $\dfrac{2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = -2 \quad \vee \quad y = 2$.

Portanto, sendo $A(\sqrt{2}, 2)$, $B(\sqrt{2}, -2)$ e $C(\sqrt{2}, 0)$, a área do triângulo será $A = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \dfrac{(2+2) \times \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

(2) O declive da recta será $m = g'(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$ e o ponto de tangência tem por coordenadas $(\ln 2, 2)$.
Logo, $y - 2 = 2.(x - \ln 2) \Leftrightarrow y = 2x + 2 - 2\ln 2 \Leftrightarrow y = 2x + 2 - \ln 4$.

(3) As duas primeiras condições eliminam o mesmo gráfico. A terceira condição elimina outro dos gráficos.
Depois, tenha em consideração como obter o gráfico de $|g|$ a partir do do g (a parte abaixo do eixo Ox sofre uma simetria em relação a esse eixo). Por último, que uma função para ser diferenciável o seu gráfico não pode ter pontos angulosos.

(4) Decorridos n anos, a população prevista é dada por $P(n) = 1{,}5 \times 1{,}02^n$. E, $P(3) \approx 1{,}59$; $P(7) \approx 1{,}72$; $P(14) \approx 1{,}98$ e $P(15) \approx 2{,}02$.

(5) Basta garantir a continuidade da função em $x = 0$, isto é, terá de ser $\lim\limits_{x \to 0^-} m(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} m(x) = m(0) = 1 + k$.

Sendo, $\lim\limits_{x \to 0^-} m(x) = 1 + k$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} m(x) = 1$, então $k = 0$.