

# Escola Secundária da Sé-Lamego

## Prova Escrita de Matemática

19/03/99

Turma A - Prova 1

12.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

### 1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 9 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

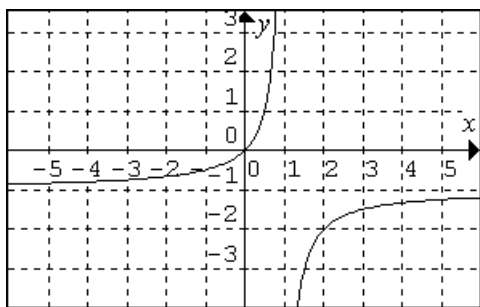
**Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a que estão será anulada, o mesmo a contendo e m caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. De uma função  $h$ , real de variável real, sabe-se que:

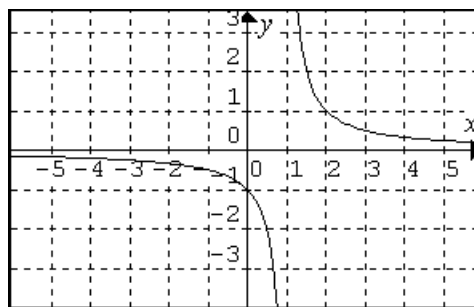
- tem domínio  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- tem um zero para  $x = 0$
- $h'(-2) = -1$

Então,  $h$  pode ser:

[A]  $h(x) = 9 + \frac{9}{x-1}$ .



[B]  $h(x) = \frac{2x}{x-1}$ .



2. Num bar de uma escola estão à venda cinco tipos de pastéis (laranja, feijão, nata, coco e amêndoa).

Quatro amigos, João, Maria, Paulo e Rui, decidem comer um pastel cada um.

O João escolhe o pastel de laranja ou de feijão. A Maria não escolhe o pastel de nata.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os pastéis?

[A]  ${}^5C_4$ .

[B]  $5^2 + 4 + 2$ .

[C]  $5^2 \times 4 \times 2$ .

[D]  ${}^5A_4$ .

3. Considere a esfera definida pela condição  $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 14$ .

Sabendo que  $[AB]$  é um diâmetro dessa esfera e que  $A$  tem coordenadas  $(1, 1, 1)$ , indique as coordenadas de  $B$ .

[A]  $(2, 4, 8)$ .

[B]  $(3, 5, 7)$ .

[C]  $(4, 6, 5)$ .

[D]  $(5, 3, 6)$ .

4.  ${}^{1999}C_{100} + {}^{1999}C_{101}$  é igual a:

[A]  ${}^{2000}C_{101}$ .

[B]  ${}^{1998}C_{100}$ .

[C]  ${}^{1999}C_{201}$ .

[D]  ${}^{2000}C_{201}$ .

5. No referencial cartesiano ortogonal da figura está representada uma elipse em que os eixos de simetria são os eixos coordenados.

A recta  $r$  é paralela ao eixo  $Oy$  e passa por um dos focos da elipse.

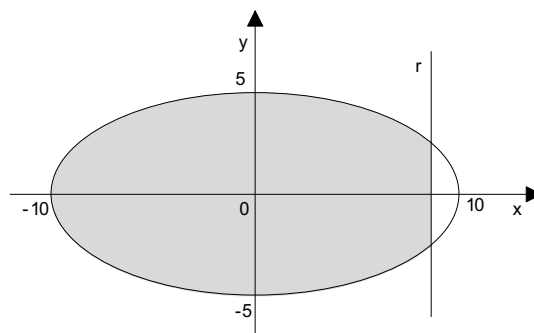
Uma condição que define a região sombreada incluindo o contorno é:

[A]  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \wedge x \leq 5\sqrt{3}$ .

[B]  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} \leq 1 \wedge y \leq \frac{17}{2}$ .

[C]  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \wedge x \leq \frac{17}{2}$ .

[D]  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} \leq 1 \wedge x \leq 5\sqrt{3}$ .



6. O valor de  $m$  para o qual a recta  $r: (x, y, z) = (1, 1, 1) + k(2, m, 1), k \in \mathbb{R}$  é paralela ao plano  $\pi: 2x - y - 2z = 0$  é:

[A]  $m = 1$ .

[B]  $m = -2$ .

[C] qualquer valor real.

[D]  $m = 2$ .

7. Arquimedes incendiou os barcos romanos que cercavam Siracusa recorrendo a espelhos dispostos segundo parábolas. A acção de Arquimedes baseou-se no conhecimento da seguinte propriedade:

[A] Os raios que incidem numa parábola e que têm direcção paralela à da directriz reflectem -se passando pelo foco.

[B] Os raios que incidem numa parábola, paralelamente ao eixo, reflectem -se passando num mesmo ponto da directriz.

[C] Todos os raios que incidem numa parábola, reflectem -se passando pelo foco.

[D] Os raios que incidem numa parábola, perpendicularmente à directriz, reflectem -se passando por um mesmo ponto.

8. A figura representa o gráfico da **segunda derivada** de uma função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$ .

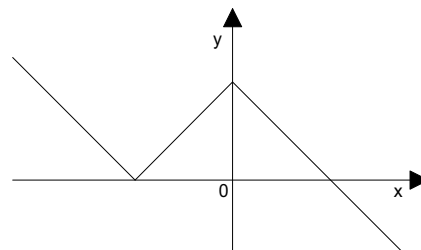
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

[A] O gráfico de  $f$  tem dois pontos de inflexão.

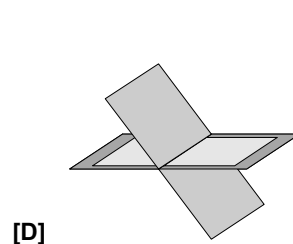
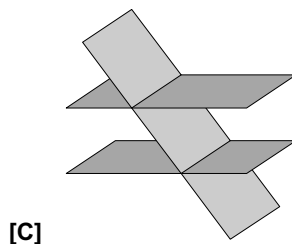
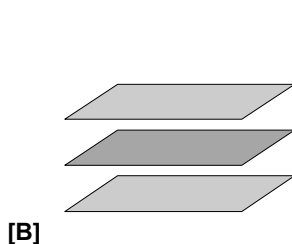
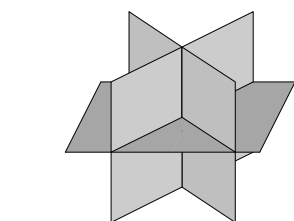
[B] O gráfico de  $f$  tem apenas um ponto de inflexão.

[C] A concavidade do gráfico de  $f$  está sempre virada para cima.

[D] A concavidade do gráfico de  $f$  está sempre virada para baixo.



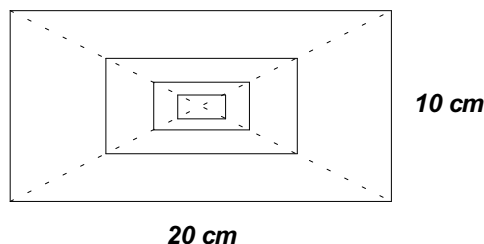
9. O sistema  $\begin{cases} y - z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \\ z - y = -7 \end{cases}$  pode ser interpretado geometricamente por:



## 2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Partindo de um rectângulo de dimensões 20 cm por 10 cm, construíram-se rectângulos tomando para sua diagonal metade da diagonal do rectângulo anterior. Sendo  $(P_n)$  e  $(A_n)$  as sucessões dos perímetros e das áreas dos sucessivos rectângulos e representando por  $P$  a soma de todos os termos de  $(P_n)$  e por  $A$  a soma de todos os termos de  $(A_n)$ , mostre que  $P = 120$  (cm) e  $A = \frac{800}{3}$  (cm<sup>2</sup>).



2. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia. A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue,  $t$  horas após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = \frac{32t}{t^3 + 16}$$

- a) Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 14 h e as 14 h 30 min, em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.
- b) Calcule  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t) - C(0)}{t}$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$  e interprete os resultados que encontrou.
- c) Recorrendo à derivada da função  $C$ , determine o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima, assim como o valor dessa concentração.
3. Uma caixa contém 30 bombons com igual aspecto exterior, 10 têm recheio de amêndoa e 20 recheio de café. Se tirarmos ao acaso 6 bombons, qual a probabilidade de **dois e só dois** terem recheio de café?

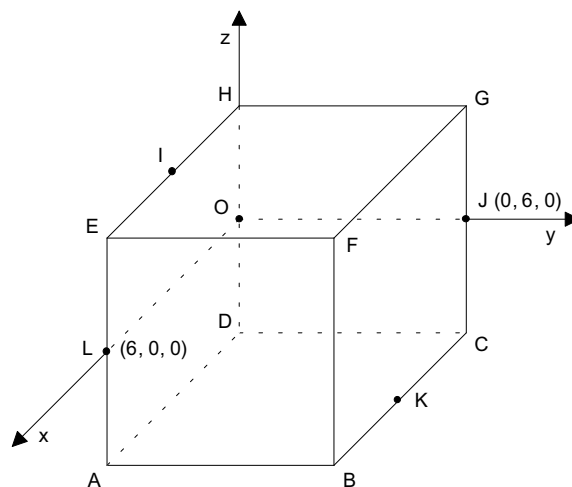
4. No referencial ortonormado  $(O, x, y, z)$ , considere o cubo  $[ABCDEFGH]$ .

- $O, I, J, K$  e  $L$  são os pontos médios de  $[DH]$ ,  $[EH]$ ,  $[CG]$ ,  $[BC]$  e  $[AE]$ , respectivamente.
- $L(6, 0, 0)$  e  $J(0, 6, 0)$ .

- a) Mostre que a recta  $KJ$  é perpendicular à recta  $AB$ .
- b) Determine uma equação cartesiana do plano  $BJL$ .
- c) Determine uma equação vectorial da recta de intersecção dos planos  $BJL$  e  $EFG$ .

**NOTA:** Caso não tenha resolvido a alínea anterior, considere  $x + y + 2z = 6$  uma equação do plano  $BJL$ .

- d) Determine o volume da pirâmide  $[AEIF]$ .



**FIM**

O Professor

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** ..... 81 pontos

Cada resposta certa ..... +9 pontos

Cada resposta errada ..... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

**Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.**

		E R R A D A S									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	0
	2	18	15	12	9	6	3	0	0		
	3	27	24	21	18	15	12	9			
	4	36	33	30	27	24	21				
	5	45	42	39	36	33					
	6	54	51	48	45						
	7	63	60	57							
	8	72	69								
	9	81									

**2.ª Parte** ..... 119 pontos

1. .... 13 pontos

2. .... 47 pontos

a) ..... 12

b) ..... 15

c) ..... 20

3. .... 15 pontos

4. .... 44 pontos

a) ..... 8

b) ..... 15

c) ..... 12

d) ..... 9

**Total 200 pontos**