Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

02/06/99 **Turma A - Prova 2** **12.º Ano**

Nome: ____	*N.º:* ____	*Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e <u>*escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde*</u>*.*
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +10 pontos; cada resposta errada, -10/3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. No início de 1999 uma certa cidade tinha $1{,}5$ milhões de habitantes, e está a crescer à taxa anual de 2%.

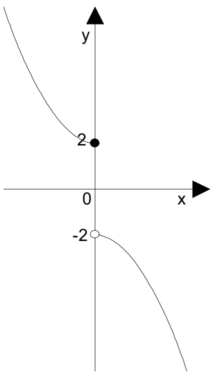
O ano em cujo início se prevê que a população ultrapasse já os 2 milhões é:

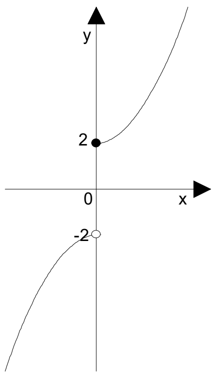
[E] 2013 **[F]** 2006
[G] 2014 **[H]** 2002

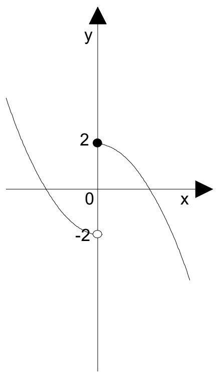
2. Seja g: $IR \to IR$ uma função tal que:

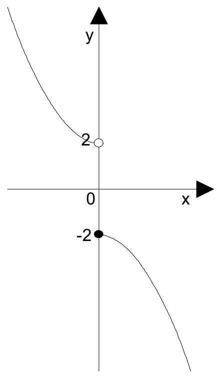
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
- $g(0) = 2$
- a função $|g|$ (módulo de g) é diferenciável em IR

Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da função g?

[E]


[F]


[G]


[H]


3. Considere a função m definida por $m(x) = \begin{cases} e^{2x} + k & \Leftarrow \quad x \le 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$.

O valor de k para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano à função m no intervalo $\left[-\frac{1}{e}, e\right]$ é:

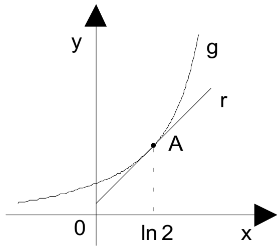
[E] $-e$. **[F]** 0. **[G]** $\dfrac{1}{e}$. **[H]** 1.

4. Sejam A e B os pontos de abcissa $\sqrt{2}$ que pertencem à elipse de equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$.

A área do triângulo [AOB] (O é a origem do referencial) é (em unidades de área):

[E] $4\sqrt{2}$. **[F]** 4. **[G]** $2\sqrt{2}$. **[H]** $\sqrt{2}$.

5. A recta *r* é tangente ao gráfico de g: $x \to e^x$ no ponto A de abcissa $\ln 2$.
Uma equação de *r* é:



[E] $y = 2x + \frac{1}{2}\ln 2 + e^2$. **[F]** $y = -\frac{1}{2}x + \ln(e^2\sqrt{2})$.

[G] $y = 2x + 2\ln\sqrt{2}$. **[H]** $y = 2x + 2 - \ln 4$.

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. A biomassa, em *mg*, de uma cultura bacteriana é dada em função do tempo, em *horas*, por

$$C(t) = \frac{20}{1+3.e^{-0,5.t}} \qquad (t \geq 0)$$

a) De que quantidade de massa se partiu?
Quanto tempo (aproximação ao minuto) decorreu até que a massa foi de 15 mg?

b) Considere a função definida em IR_0^+ por $C(t)$.

b1) Estude a monotonia da função, as concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico.

Sugestão: Comece por mostrar que $C'(t) = \frac{30.e^{-0,5.t}}{(1+3.e^{-0,5.t})^2}$ e $C''(t) = \frac{15.e^{-0,5.t}.(3.e^{-0,5.t}-1)}{(1+3.e^{-0,5.t})^3}$ (*C'* e *C''* designam, respectivamente, as funções 1.ª e 2.ª derivadas de *C*)

b2) Estude a existência de assimptotas do gráfico da função.

c) Tendo em consideração o estudo efectuado nas alíneas anteriores:

- Interprete os resultados relativamente à situação inicialmente apresentada.
- Em que instante começou a travar o crescimento desta biomassa? Justifique.

2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$.

a) Determine o domínio de *f* e os valores de *x* tais que $\frac{1}{f(x)} < 2$.

b) Mostre que o gráfico de *f* admite apenas duas assimptotas.

c) Caracterize f^{-1}, função inversa de *f*.

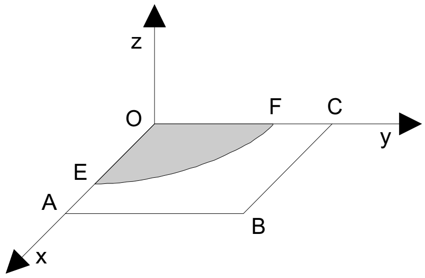
3. Os alunos de uma turma do 12.º ano pretendem realizar um passeio de finalistas, mas não conseguem chegar a acordo acerca do destino. Na pré-inscrição, 20 inscreveram-se no passeio a Londres, 12 inscreveram-se no passeio a Paris, 10 inscreveram-se nos dois destinos. Todos os alunos se inscreveram pelo menos num destino.

a) Mostre que a turma é constituída por 22 alunos.

b) Decidiu-se formar uma comissão com 2 alunos da turma para decidir o destino da viagem. De quantas maneiras se pode formar a comissão?

c) Qual a probabilidade de, escolhida aleatoriamente esta comissão, os alunos que a formam tenham manifestado pelo menos um destino comum?

4. No referencial ortonormado (*O, x, y, z*) da figura,



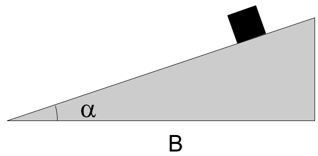
- [*ABCO*] é um quadrado que tem de lado 3 unidades;
- *EF* é um arco da circunferência de centro O;
- a área do sector circular limitado pelo arco EF e pelos segmentos [*OE*] e [*OF*] é π unidades de área.

a) Determine as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *F*.

b) Determine uma equação cartesiana do plano α, sabendo que $A \in \alpha$ e $\overrightarrow{EF} \perp \alpha$

c) Identifique e defina analiticamente a superfície descrita pelo quarto da circunferência quando dá uma volta completa em torno do eixo *Ox*.

5. Ignorando o atrito, o tempo *t* (em segundos) necessário para um bloco deslizar por um plano inclinado é dado pela fórmula



$$t = \sqrt{\frac{2.B}{g.\text{sen}(\alpha).\cos(\alpha)}}$$

onde *B* é a medida do comprimento da base em metros e *g* é a aceleração da gravidade.

Supondo que a medida do comprimento da base é 19,6 m e que a aceleração da gravidade é 9,8 m/s^2, determine o(s) valor(es) de α para que o bloco demore 4 segundos a deslizar pelo plano inclinado.

Interprete as soluções encontradas relativamente à situação apresentada.

Formulário

$\text{sen}(2x) = 2.\text{sen}\,x.\cos x$ $\quad$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ $\quad$ $tg(2x) = \dfrac{2.tgx}{1 - tg^2 x}$

$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\,a.\cos b \pm \cos a.\text{sen}\,b$ $\quad$ $\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \text{sen}\,a.\text{sen}\,b$ $\quad$ $tg(a \pm b) = \dfrac{tga \pm tgb}{1 \mp tga.tgb}$

FIM

O Professor

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 50 pontos

Cada resposta certa .... +10 pontos

Cada resposta errada .... -10/3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E	R	R	A	D	A	S
		0	1	2	3	4	5
C	0	0	0	0	0	0	0
E	1	10	7	3	0	0	
R	2	20	17	13	10		
T	3	30	27	23			
A	4	40	37				
S	5	50					

2.ª Parte .... 150 pontos

1. .... 53 pontos
   - a) 12
   - b1) 23
   - b2) 10
   - c) 8

2. .... 37 pontos
   - a) 12
   - b) 15
   - c) 10

3. .... 20 pontos
   - a) 6
   - b) 7
   - c) 7

4. .... 20 pontos
   - a) 6
   - b) 7
   - c) 7

5. .... 20 pontos

Total **200 pontos**