Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

31/01/2000 **Turmas A, B e C - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

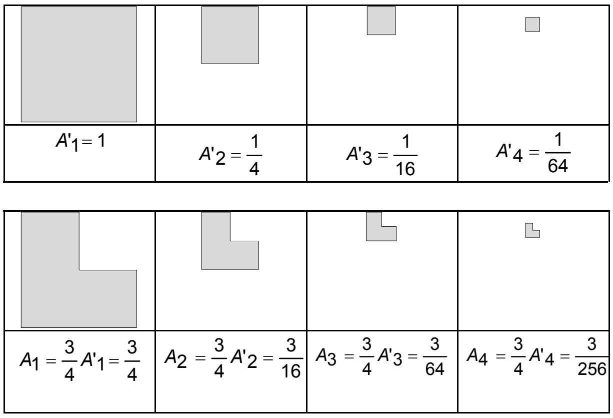
1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**C**	**D**	**D**	**C**	**B**
Questão	*2*	*3*	*4*	*1*	*5*
Prova 2	**F**	**F**	**G**	**F**	**G**

2.ª Parte

1.

a) Consideremos os primeiros 4 termos das sucessões das áreas dos quadrados e das figuras que sobram, conforme se indica a seguir.



Em qualquer das sucessões, a razão das progressões é $\frac{1}{4}$, pois $\frac{A'_{n+1}}{A'_n} = \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}$.

Como a área da primeira figura sobrante é $\frac{3}{4}$, então a expressão do termo geral desta progressão geométrica será: $a_n = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^{n-1} = 3 \times (\frac{1}{4})^n$.

b) A soma das áreas de todos as figuras que sobram em cada partição é:

$$\lim\ S_n = \lim\ \left(\frac{3}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \lim\ (1-(\frac{1}{4})^n) = 1 \times (1-0) = 1 .$$

Acabámos de concluir que a área de todas as figuras da sequência é igual à área do quadrado inicialmente considerado. Este facto é de todo evidente: basta reparar que o quadrado inicial pode ser obtido justapondo todas as figuras que sobram em cada partição (desloque para a esquerda todas as peças a partir da segunda). Outro facto também óbvio é que nenhuma porção do quadrado inicial é desperdiçada nas sucessivas partições.

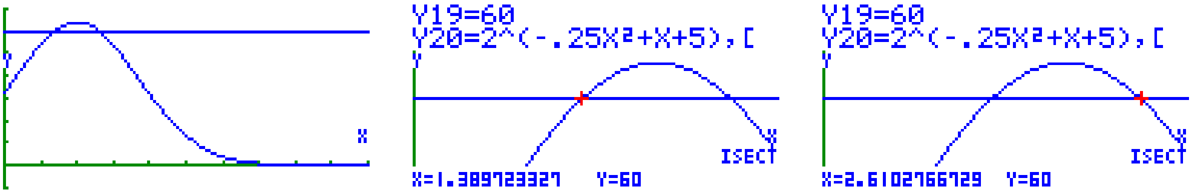
2.

a) Há 32% de pessoas infectadas no momento da declaração da epidemia, pois $P(0) = 2^5 = 32$.

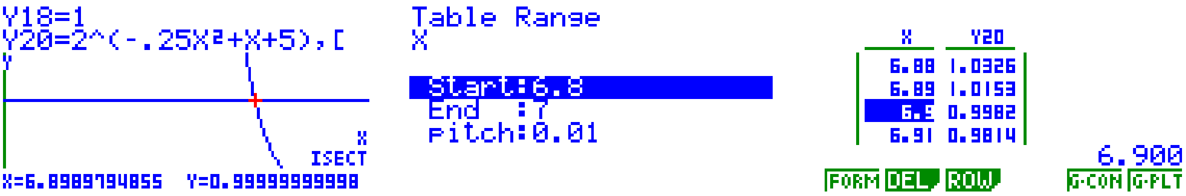
$$\begin{aligned} P(t) \geq 32 &\Leftrightarrow 2^{-0{,}25t^2+t+5} \geq 2^5 \quad \wedge \quad t \geq 0, \\ &\Leftrightarrow -0{,}25t^2 + t + 5 \geq 5 \quad \wedge \quad t \geq 0, \quad \text{tendo em consideração que a função } x \to 2^x \text{ é estritamente crescente} \\ &\Leftrightarrow -t \times (0{,}25t - 1) \geq 0 \quad \wedge \quad t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t \in [0,4] \quad \wedge \quad t \geq 0, \quad \text{tendo em consideração o estudo da função quadrática} \\ &\Leftrightarrow t \in [0,4] \end{aligned}$$

A percentagem de pessoas infectadas foi superior ou igual à existente no momento da declaração da epidemia durante as primeiras $4 \times 24 = 96$ horas após essa declaração.

b) Considerando, respectivamente, as janelas de visualização [0, 10]→[-1, 70] e [0, 3]→[50, 70] representaram-se graficamente as funções $y_{20} = 2^{-0,25x^2+x+5}$ e $y_{19} = 60$, cujos gráficos se indicam a seguir.

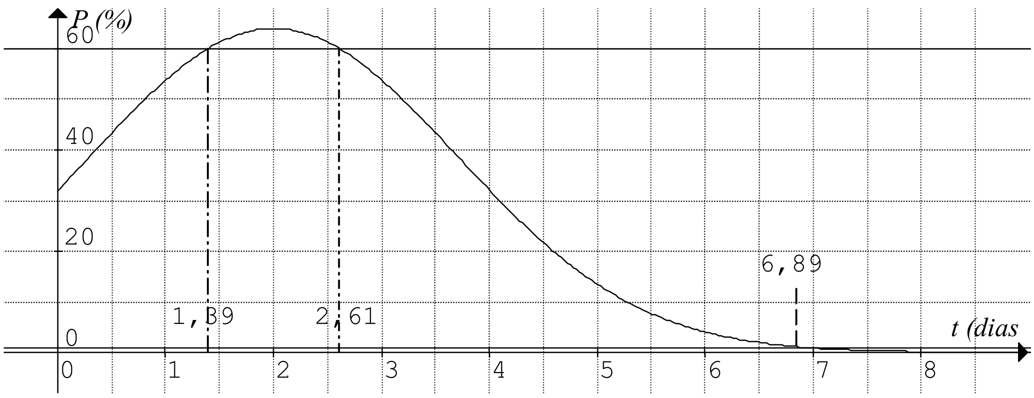


Considerando agora a janela de visualização [0, 10]→[0, 2], representaram-se as funções $y_{20} = 2^{-0,25x^2+x+5}$ e $y_{18} = 1$; criou-se ainda uma tabela de valores de y_{20}, conforme se indica seguidamente.



NOTA: Sabendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0,25x^2 + x + 5) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x) = 0^+$, podemos concluir $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 0^+$.

Reunindo toda esta informação podemos elaborar o gráfico seguinte.



Do gráfico conclui-se que a epidemia foi erradicada ligeiramente antes de se atingirem 7 dias, pelo que se veio a confirmar o prognóstico do SNS quanto ao prazo de erradicação da epidemia.

Já quanto à gravidade da situação não sucedeu o mesmo, pois veio a verificar-se que aproximadamente durante 29 horas ($2,61 - 1,39 = 1,22$; $1,22 \times 24 = 29,280$) houve mais de 60% da população afectada, pelo que, tendo sido ultrapassado o limiar referido, a epidemia terá apresentado ainda alguma gravidade.

Quanto a terem sido ou não tomadas todas as medidas recomendadas, não há informação que permita efectuar essa avaliação.

3.

a) Considerando as condições fronteira, podemos estabelecer o sistema $\begin{cases} h(0) = 3 \\ h(14) = 0 \end{cases}$, donde

$$\begin{cases} \log_2 a = 3 \\ \log_2(a - 14b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \\ a - 14b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = \frac{7}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$, como queríamos mostrar.

b) Podemos, portanto, escrever $h(t) = \log_2(8 - \frac{t}{2})$, donde

$$tvm_{[6,11]} = \frac{h(11) - h(6)}{11 - 6} = \frac{\log_2(8 - 5,5) - \log_2(8 - 3)}{5} = \frac{\log_2(2,5) - \log_2(5)}{5} = \frac{\log_2(\frac{2,5}{5})}{5} = \frac{\log_2(\frac{1}{2})}{5} = \frac{-1}{5} = -0,2 \text{ (m/h)}.$$

No período referido, a altura da água no reservatório desceu, em média, 20 cm por hora, isto é, entre os instantes correspondentes a seis e a onze horas após a abertura da válvula, a altura da água no reservatório diminuiu a uma velocidade de 0,2 metros por hora.

c) Sendo $h = \log_2(8 - \frac{t}{2})$, vem $2^h = 8 - \frac{t}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{2} = 8 - 2^h \Leftrightarrow t = 16 - 2^{h+1}$.

Sabendo que $D_h = [0,14]$ e que $D'_h = [0,3]$ será:

$$\begin{aligned} t:\ & [0,3] \to [0,14] \\ & h \to 16 - 2^{h+1} \end{aligned}.$$

4. A condição dada tem domínio $R \setminus \{0\}$ e a condição $2\log x = 2\log 3$ tem domínio R^+.

Portanto, a primeira equivalência que estabeleceu apenas é válida em R^+ e não no domínio da equação que pretendia resolver. Daí não ter determinado a solução negativa.

A Ana poderia ter considerado, por exemplo, as seguintes alternativas:

$\log x^2 = 2\log 3 \Leftrightarrow \log x^2 = \log 3^2 \Leftrightarrow \log x^2 = \log 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

$\log x^2 = 2\log 3 \Leftrightarrow 2\log|x| = 2\log 3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

5.

a) Sendo S' a projecção ortogonal do ponto S sobre o plano *xOy*, podemos considerar $\overline{SS'}$ para altura da pirâmide, sendo $\overline{SS'} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo [SS'Q] (note que [OQ] é diagonal de um quadrado de lado 1).

Considerando o triângulo [AOB] para base da pirâmide, vem:

$V = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AO} \times \overline{OB}}{2} \times \overline{SS'} = \frac{1}{6} \times x \times \frac{1}{x+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{12(1+x)}$ como queríamos mostrar.

b) Se o ponto A se desloca sobre o semieixo positivo *Ox*, afastando-se infinitamente da origem do referencial, então $x \to +\infty$.

Ora, $\lim\limits_{x \to +\infty} V(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{2}}{12(1+x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{12(\frac{1}{x} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{12}$, pelo que nessa circunstância o volume da pirâmide tende para $\frac{\sqrt{2}}{12}$ unidades de volume.

6.

a) Os dois CD's dos **U**2 podem ser escolhidos de ${}^3C_2 = 3$ maneiras diferentes, o CD dos **Y**es pode ser escolhido de ${}^4C_1 = 4$ maneiras diferentes e os três CD's dos **B**eatles podem ser escolhidos de ${}^5C_3 = 10$ maneiras diferentes. Logo, a Zulmira pode fazer a sua escolha de $3 \times 4 \times 10 = 120$ maneiras.

b) Há 5 possibilidades para os dois CD's dos **U**2 serem ouvidos um a seguir ao outro: 1.º e 2.º, 2.º e 3.º, 3.º e 4.º, 4.º e 5.º ou 5.º e 6.º.
Ao ocuparmos essas 2 posições com os discos dos **U**2, obteremos uma sequência de audição diferente se permutarmos os dois CD's entre si.
As restantes 4 posições serão ocupadas pelos restantes 4 CD's (um dos **Y**es e três dos **B**eatles), originando diferentes sequências de audição quando permutamos esses 4 CD's nessas 4 posições.

Portanto, o número de casos favoráveis é $NCF = 5 \times P_2 \times P4$ e o número de casos possíveis é $NCP = P6$.

Assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{5 \times 2! \times 4!}{6!} = \frac{5 \times 2}{6 \times 5} = \frac{1}{3}$.

Se em vez de considerarmos o espaço de acontecimentos o conjunto das permutações dois seis CD's considerássemos o conjunto dos pares ordenados (a, b), onde a e b designam a ordem em que vão ser ouvidos os CD's A e B dos **U**2, seria $NCF = 5 \times P_2 = 10$ e $NCP = {}^6A_2 = 30$.

Considerando agora o espaço de acontecimentos constituído pelos conjuntos {a, b}, onde a e b têm o mesmo significado que anteriormente, seria $NCF = 5$ e $NCP = {}^6C_2 = 15$.

FIM

(1) $\overline{X} = 0{,}125 \times 0 + 0{,}375 \times 1 + 0{,}375 \times 2 + 0{,}125 \times 3 = 1{,}5$

(2) Sendo uma função de domínio R e estritamente crescente em R_0^+, dado que é uma função par, então será estritamente decrescente em R_0^-, pelo que $g(0) = 1$ será mínimo da função.

Assim,

- o contradomínio de g não pode ser R_0^+, pois $g(0) = 1$ é mínimo da função;
- g não é estritamente crescente em R, pois como já foi referido é decrescente em R_0^-;
- g não é injectiva, pois, sendo uma função, par objectos simétricos têm igual imagem;
- g não tem zeros, pois $g(0) = 1$ é mínimo da função.

(3) O domínio da função h é R e o seu contradomínio é $\left[-1, +\infty\right[$.

Como sabemos, a função $x \to g(x) = 2^x$, de domínio R e contradomínio R^+, é estritamente crescente.

A função $x \to f(x) = 2^{h(x)}$, de domínio R, tranformará R em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, pois $f(R) = (g \circ h)(R) = g(h(R)) = g(\left[-1, +\infty\right[) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

(4) Como (u_n) é um infinitésimo com todos os termos positivos, então $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = 2$. Tenha em consideração a definição de Heine e a interpretação gráfica do limite de uma função num ponto, notando que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 2$.

(5) Como a disquete retirada em primeiro lugar não é deituosa, ficaram na caixa 9 disquetes sendo 3 delas defeituosas.

Assim, $p(D_2 \mid \overline{D_1}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Ou, $p(D_2 \mid \overline{D_1}) = \dfrac{p(D_2 \cap \overline{D_1})}{p(\overline{D_1})} = \dfrac{\frac{7 \times 3}{10 \times 9}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{1}{3}$.